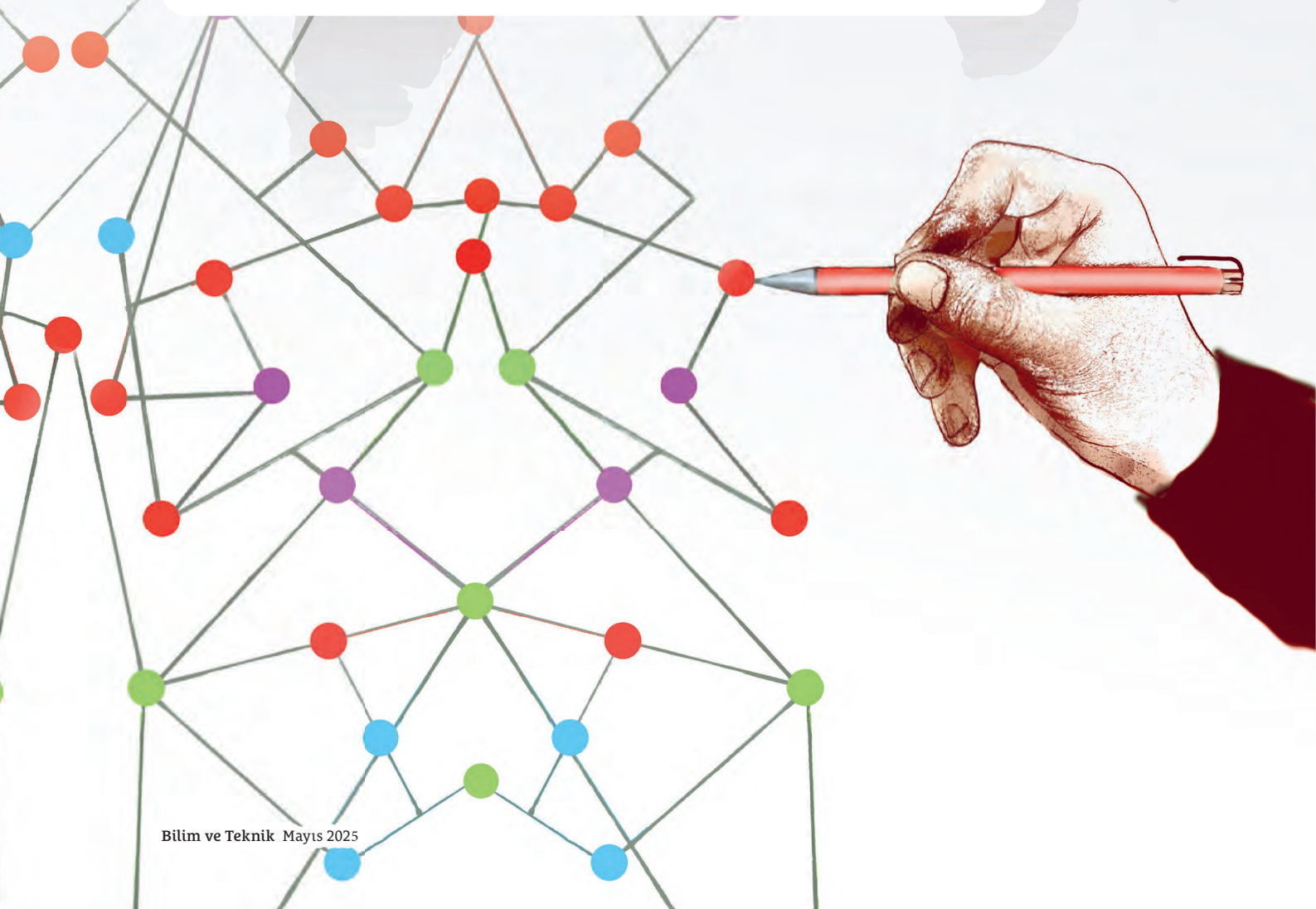
Köprü Bilmecesinden Yapay Sinir Ağlarına **Çizge Kuramı**

Dr. Öğr. Üyesi Yeşim İmamoğlu [*Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü*



Ikon Images / Gary Waters / SPL

Madmaxer / iStock

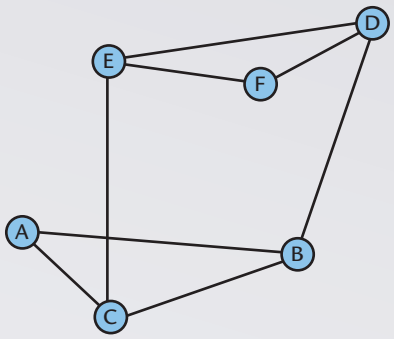
Sosyal medyada gezinirken tanıdık birinin "önerilen kişiler"de karşımıza çıkması, navigasyon cihazımızın şehirdeki karmaşık yollar arasında saniyeler içinde en kısa rotayı bulması veya müzik uygulamasının tam da zevkimize uygun çalma listesi oluşturması gibi birçok durumda perde arkasında çalışan şaşırtıcı bir matematik var: Çizge Kuramı.

Çizgeler, noktalar ve bu noktaları birleştiren çizgiler ile görselleştirilen matematiksel yapılardır. İlk bakışta oldukça basit gözükseler de aslında sosyal ağlardan ulaşım sistemlerine bilgisayar bilimlerinden biyolojiye kadar pek çok karmaşık yapının modellenmesinde ve analizinde kullanılabilecek kadar güçlüler.

Çizge Kuramı Nedir?

Çizge kuramı, nesneler arasındaki ikili ilişkileri çizge (graph) adı verilen matematiksel yapılar kullanarak inceler. Çizgeyi bir problem durumunun soyutlanmış hâli olarak düşünebiliriz. Bu soyutlama sayesinde karmaşık yapılar daha anlaşılır hâle geliyor.

Çizgeler, problem durumuna göre farklı şekillerde temsil edilebiliyor. Görsel bir çizge gösteriminde köşe veya düğüm olarak adlandırılan noktalar genellikle kişiler, şehirler, web siteleri gibi ögeleri temsil eder. Köşeler arasındaki bağlantılar kenar olarak adlandırılır ve genellikle çizgiler veya yaylarla temsil edilir. Kenarlar, köşeler ile temsil edilen ögeler arasındaki ilişkileri veya etkileşimleri gösterir. Bir köşeden çizilen kenar sayısına o köşenin derecesi denir. Örneğin bir grup insan arasındaki arkadaşlık ilişkisini gösteren şekildeki çizgede kişiler köşelerle, arkadaşlık durumu ise kenarlar ile temsil ediliyor. Çizgeye baktığımızda her köşenin derecesi bize o kişinin kaç tane arkadaşı olduğunu gösteriyor.

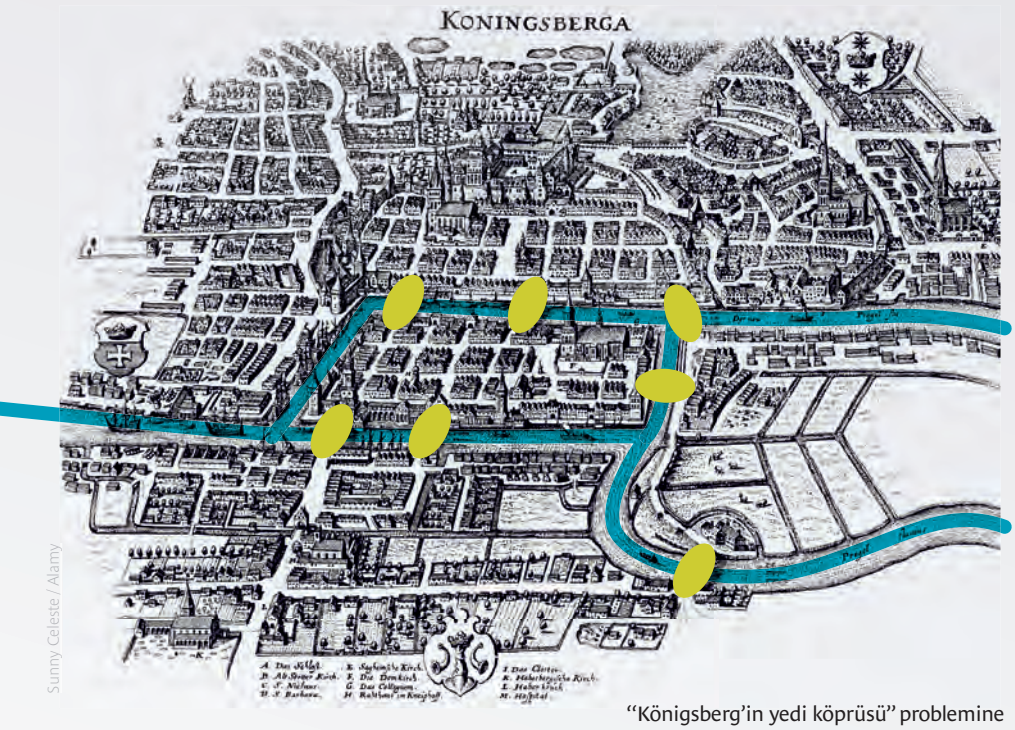


Altı kişilik bir grupta arkadaşlık ilişkilerini gösteren bir çizge

Görsel ChatGPT ile oluşturulmuştur

Çizge Kuramı Nasıl Ortaya Çıktı?

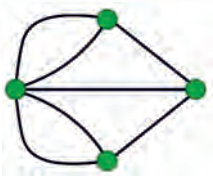
Çizge kuramı, oldukça fazla uygulama alanı olmasının yanı sıra ortaya çıkış hikâyesi ile de ilgi çekiyor. Başrolde matematiğe katkıları saymakla bitmeyen Leonhard Euler var. Bu muhteşem bilim insanının "Königsberg'in yedi köprüsü" olarak adlandırılan bir problemin çözümü için geliştirdiği yöntem, çizge kuramının temellerini attı. Euler'in zamanında, Prusya'nın Königsberg (günümüzde Rusya sınırları içinde yer alan Kaliningrad) kentinde şekildeki haritada göründüğü gibi bir nehrin iki kolu arasında kalan iki ada ve adaları birbirine ve diğer kara parçalarına bağlayan 7 tane köprü vardı. Problem şuydu: Şehrin yedi köprüsünün her birinden yalnızca bir kez geçerek bir yürüyüş yapmak mümkün mü?



Sunny Celeste / Alamy

"Königsberg'in yedi köprüsü" problemine konu olan şehrin planındaki 7 adet köprü yeşil renk ile belirtilmiştir.

Euler, 1736 yılında mantık bulmacalarına benzeyen bu problemin çözümü ile ilgili bir yazı yazdı. Yazısında bu problemin herkesçe bilindiğini ve şu ana kadar böyle bir yürüyüş yapılabileceğini kimsenin iddia edemediğini duyduğunu söyleyen Euler, böyle bir yürüyüşün mümkün olmadığını kanıtladı ve problemi genelleştirerek böyle bir yürüyüşün hangi koşullarda sağlanabileceğini ortaya koydu.



Euler, bu soruyu çözebilmek için kentin yapısını soyutlayarak bir "çizge" oluşturdu. Bu çizgede kara parçaları noktalarla, köprüler de çizgiler ile temsil ediliyor. Burada noktaların konumları veya çizgilerin nasıl çizildiğinin bir önemi yok, sadece her köşenin kaç kenar ile diğer köşelere bağlı olduğu önemli. Dolayısı ile bu soyutlama, sadece problem için önemli olan özelliklere odaklanmayı sağlıyor.

Bu problemin çözümü, çizgelerin nasıl kullanılabileceğini gösteren ilk matematiksel çalışmalardan biri olarak kabul ediliyor. Euler'in bu alandaki çalışmaları daha sonra Kazimierz Kuratowski, Paul Erdös ve Dénes König gibi matematikçilerin katkılarıyla genişledi. Çizge kuramı, zamanla hem nesnelerin sayılması ve düzenlenmesiyle ilgilenen kombinatorik hem de şekillerin konumsal ilişkilerini inceleyen topoloji alanları ile bağlantılı şekilde ilerledi. Bilgisayar biliminin gelişimi ile de çizge kuramı bu alanda önemli bir rol oynamaya başladı. Günümüzde ise yapay zekâ çalışmalarında kullanılan çizge sinir ağları (graph neural networks) gibi önemli uygulama alanları ile ön plana çıkıyor.

İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler (1707-1783)

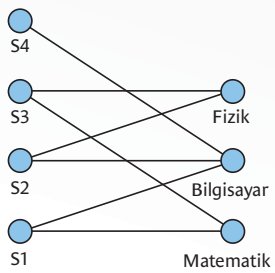
Collection Abecasis / SPL

Çizge Türleri

Çizge kuramında farklı özelliklere sahip çizge türleri bulunuyor. Başlıca türleri kısaca inceleyelim:

İki Parçalı Çizgeler
(Bipartite Graphs)

Bu tür çizgelerde köşeler iki farklı kümeye ayrılabilir ve aynı küme içindeki köşeler arasında kenar bulunmaz. İki parçalı çizgeler çalışanlara görev atama, öğrenciler ve aldıkları dersler gibi eşleştirme problemlerinde, dijital platformlarda kullanıcı-öğe ilişkilerini incelemede ve sosyal ağ (kullanıcılar ve gruplar arasındaki ilişkiler) analizleri gibi durumlarda kullanılıyor.

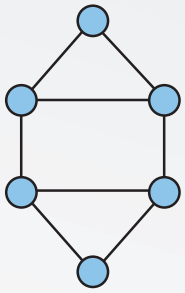


Görsel ChatGPT ile oluşturulmuştur

Öğrenciler ve derslerin eşleştirildiği iki parçalı bir çizge

Bağlantılı Çizgeler
(Connected Graphs)

Her iki köşe arasında bir yol bulunabilen çizgelerdir. (Örneğin A ve B, B ve C, C ve D köşeleri arasında kenar varsa A'dan D'ye bir yol var diyebiliriz.) Başka bir deyişle bağlantılı çizgelerde hiçbir köşe kopuk değildir: Her köşe birbiriyle doğrudan ya da dolaylı olarak bağlıdır. Bu tür çizgeler, sosyal ağlarda bireyler arasındaki ilişkileri, ulaşım sistemlerinde şehirler arası yolları, internet ve bilgisayar ağlarında veri iletim yollarını, elektrik şebekelerinde enerji dağıtımını ve biyolojik sistemlerde gen ya da protein etkileşimlerini modellemek için kullanılıyor.



Bağlantılı bir çizgede her bir köşeye herhangi başka bir köşeden ulaşmak mümkün

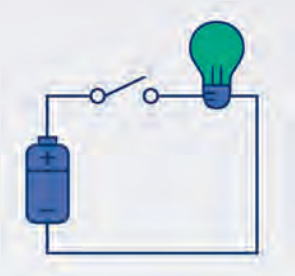
Görsel ChatGPT ile oluşturulmuştur

Yönlü Çizgeler
(Directed Graphs)

Kenarların belirli bir yönü olan çizgelerdir. Nesneler arası ilişkilerin tek yönlü olduğu durumlarda sıra, akış ve nedensellik içeren sistemlerin analizinde yönlü çizgeler önem taşıyor. İş akışları, üretim süreçleri, yazılım geliştirme adımları gibi zaman ve sıra ilişkisine dayalı sistemler, ulaşım ağlarında tek yönlü yollar, elektronik devrelerdeki sinyal akışı ve dersler arası ön koşul ilişkileri bu tür çizgelerle temsil edilebiliyor.

Düzlemsel Çizgeler
(Planar Graphs)

Kenarları birbirini kesmeden düzlemde çizilebilen çizgelerdir. Harita renklendirme problemleri ve devre tasarımlarında kullanılıyor.



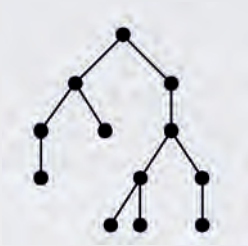
ekazansk / iStock

Ağırlıklı Çizgeler
(Weighted Graphs)

Her kenarın bir ağırlık değeri taşıdığı çizgelerdir. Bu değer, genelde mesafe, maliyet, zaman veya kapasite gibi ölçümleri temsil ediyor. Ağırlıklı çizgeler, en kısa yol ya da en ucuz rota gibi optimizasyon problemlerinde kullanılıyor. Örneğin harita uygulamalarında şehirler arası yolların uzunluğu ya da trafik yoğunluğu ağırlık olarak çizgeye ekleniyor. Lojistikte dağıtım yollarının maliyeti, elektrik şebekelerinde hatların kapasite ve direnç bilgileri de çizgelerde ağırlık olarak kullanılabiliyor.

Ağaç Çizgeler
(Tree Graphs)

Herhangi iki düğüm arasında yalnızca tek bir yol bulunan çizgelerdir. Döngü içermeyen ve bağlantılı olan bu tür çizgeler ile hiyerarşik yapılar temsil edilebiliyor. Bilgisayar biliminde dosya sistemleri, yapay zekâda karar ağaçları ve genetikte soyağaçları gibi birçok alanda ağaç yapıları etkili bir şekilde kullanılıyor.



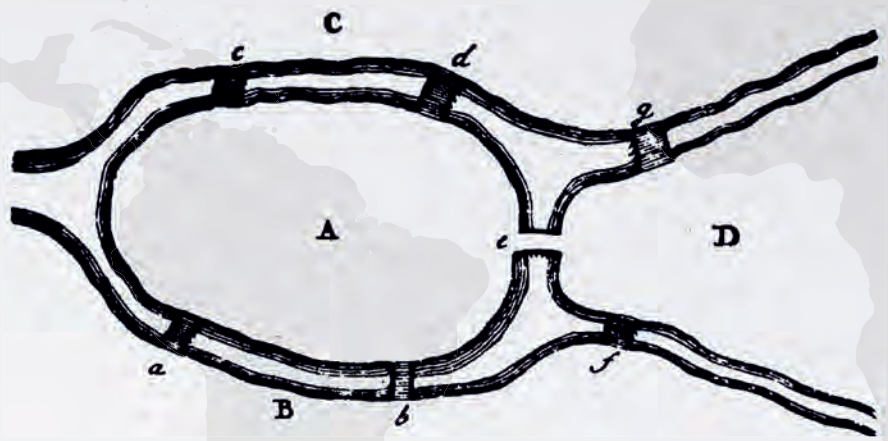
Ağaç yapısında bir çizge

Görsel ChatGPT ile oluşturulmuştur

Çizge Kuramında Dört Önemli Problem

Köprü (Euler Turu) Problemi

Euler'in Königsberg köprüleri problemi, bir çizgede tüm kenarların sadece bir kez kullanılarak bir çizgeyi dolaşma problemi olarak biliniyor. Her kenarın yalnızca bir kez geçildiği yol Euler yolu olarak adlandırılıyor. Eğer bu yol, başladığı noktada bitiyorsa yani çizgedeki tüm kenarlar bir kez kullanılarak bir döngü oluşturuyorsa buna Euler turu deniyor.



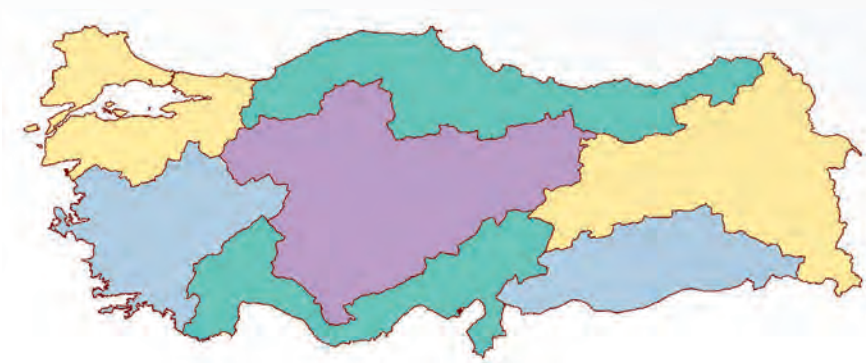
Euler'in Königsberg'in yedi köprüsü probleminin şematik olarak gösterimi

Art Collection 4 / Alamy

Köprü probleminin optimizasyon içeren bir uygulaması ilk olarak Mei-Ko Kwan isimli genç bir Çinli matematikçi tarafından ele alındı ve bu problem daha sonra onun onuruna Çinli postacı problemi olarak adlandırıldı. Problem, postacının bir şehirdeki tüm yolları, katettiği toplam mesafe en az olacak şekilde, kapsayarak dağıtım yapıp postaneye geri dönmesi ile ilgili. Çoğu zaman şehir ağları Euler turu içermez. Bu durumda bazı yollar ikinci kez geçilerek tüm yollar kapsanır. Yani Çinli postacı problemi, Euler turunun mümkün olmadığı durumlarda en az tekrar ile tüm kenarları kapsayan bir rota bulmayı amaçlıyor. Günümüzde Euler yolları ve turları, şehir temizlik araçlarının rotalarının belirlenmesi, kar küreme ve çöp toplama planlaması, robotların alan tarama görevleri gibi pek çok alanda, her yolun en az bir kez geçilmesi gereken görevlerde kullanılıyor.

Dört Renk Teoremi

Çizge kuramının ilginç problemlerinden biri, düzlem üzerinde çizilen bir haritayı renklendirmek için komşu bölgelerin aynı renge boyanmaması koşuluyla kaç renk kullanılması gerektiği ile ilgiliydi. 1800'lü yıllarda bunun için dört rengin yeterli olacağı iddiası ortaya atıldı. Bu durum düzlemsel çizge ile temsil edildiğinde iddia, "düzlemsel çizgelerde köşeler, aralarında kenar olan köşeler aynı renge sahip olmayacak şekilde en fazla dört farklı renkle renklendirilebilir" olarak ifade edilebilir. Yüz yılı aşkın bir süre sonra 1976'da Kenneth Appel ve Wolfgang Haken, binlerce durumu bilgisayar yardımıyla inceleyerek bu iddiayı ispatladı. Dört renk teoremi, hem herkesin anlayabileceği kadar basit bir ifadesi olması hem de ispatının karmaşıklığı ve bilgisayar destekli ilk büyük ispat olması nedeniyle matematik dünyasında önemli bir yere sahiptir. Günümüzde coğrafi haritaların renklendirilmesi, mobil haberleşme sistemlerinde frekans planlaması, üniversitelerde sınav zaman çizelgelerinin oluşturulması, iş planlamaları ve görev atamaları, veri görselleştirme gibi birbirine bağlı birimlerin çakışmaması gereken pek çok durumda dört renk problemi yaklaşımı kullanılıyor.



Türkiye haritasında bölgelerin 4 renk ile gösterimi

mapchart.net ile oluşturuldu

Hamilton Yolu Problemi

Çizge kuramında önemli bir yer tutan bu klasik problem, bir çizgede her köşeye yalnızca bir kez uğrayarak çizgedeki tüm noktaları dolaşan bir yol bulunup bulunamayacağını tartışır. Bu tür bir yola *Hamilton yolu* denir. Eğer yol başlangıç noktasına geri dönüyorsa *Hamilton döngüsü* adını alır. Hamilton yolu problemi özellikle rota planlama, veri ağlarının optimizasyonu ve devre tasarımı gibi birçok durumda karşımıza çıkıyor. Örneğin bir robotun bir fabrikanın her bölümünü bir kere ziyaret ederek görevini tamamlaması, bir kargonun tüm adreslere uğrayıp son teslim noktasına ulaşması ya da bir seyahat rotasında tüm şehirlerin yalnızca bir kez ziyaret edilmesi gibi senaryolar, Hamilton yolu mantığıyla modellenebiliyor.

Hamilton yolu, optimizasyon alanında çok araştırılan *gezgin satıcı problemi*nin de temelini oluşturuyor. Bir satıcının belirli sayıda şehri her birine yalnızca bir kez uğrayarak en kısa toplam mesafeyle dolaşmasını inceleyen bu problem, Hamilton yolunun varlığının yanı sıra en kısa yolu bulmakla da ilgilenir. Yani satıcının rotası ağırlıklı bir çizge ile temsil edilir.

Alt Çizge İzomorfizm Problemi

Çizge kuramında önemli bir eşleşme problemidir ve şu temel soruya odaklanır: Bir büyük çizge içinde verilen daha küçük bir çizgeye izomorf bir alt çizge (çizgenin bir parçası) bulunabilir mi? İki çizgenin "izomorf" olması aynı bağlantı yapısına sahip olması demektir yani köşeler farklı adlarla gösterilse bile bağlantıların şekli aynıdır. Alt çizge izomorfizm problemi, özellikle veri yapıları ve ağ analizlerinde karşımıza çıkıyor. Sosyal ağ analizlerinde, bir sosyal ağda belirli bir kullanıcı etkileşim yapısının var olup olmadığı araştırılırken veya bilgi güvenliğinde kötü amaçlı yazılımların davranış desenlerini temsil eden çizgelerin sistem aktiviteleri içinde tespit edilmesi gibi durumlarda kullanılıyor. Bir molekülde belirli bir kimyasal yapı örüntüsünün bulunup bulunmadığı bu yöntemle inceleniyor.

Çizge kuramı, ilk bakışta basit görünen ancak çok geniş bir uygulama alanına sahip olan güçlü, matematiksel bir araç. Euler'in köprü probleminden günümüz yapay zekâ algoritmalarına kadar uzanan bu kuram, karmaşık sistemleri analiz etmemizi ve optimize etmemizi sağlıyor. Günlük hayatımızdaki birçok sistem, görünmez bir ağ ile birbirine bağlı ve çizge kuramı bu bağlantıları anlamamıza yardımcı oluyor. ■

Kaynaklar

https://www.masterclass.com/articles/graph-theory
https://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html
https://doi.org/10.1007/11790754_8
https://doi.org/10.36227/techrxiv.12061662.v1
https://doi.org/10.1023/A:1021271610995
https://www.scientificamerican.com/article/how-the-seven-bridges-of-koenigsberg-spawned-new-math/
Alexanderson, Gerald. About the Cover: Euler and the Königsberg Bridges: A Historical View. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*. 43. 567-573. 10.1090/S0273-0979-06-01130-X, 2006.
Appel, K., & Haken, W. Every planar map is four colorable. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3), 429–567, 1977.
Euler, L. Konum geometrisine ait bir problemin çözümü (Çeviri: M. Kanuni Er & S. Sert) https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1052&context=euler-works&filename=0&type=additional
Grötschel, M., & Yuan, Y. X. Euler, Mei-ko Kwan, Königsberg, and a Chinese postman. *Optimization Stories*, 43, 2012.
Laporte, G. A concise guide to the traveling salesman problem. *Journal of the Operational Research Society*, 61(1), 35-40, 2010.
Wu, S., Sun, F., Zhang, W., Xie, X., & Cui, B. Graph neural networks in recommender systems: a survey. *ACM Computing Surveys*, 55(5), 1-37, 2022.
Yılmaz, M. Karayolları bakım çalışmasında kullanılan araçların güzergâhlarının hiyerarşik Çinli postacı problemi kullanılarak düzenlenmesi. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 8(4), 107-115, 2018.