



Kesirdeki İlginç Eşitlik :

1'den başlayarak ardışık tek sayıları pay ve paydadaki toplama işlemine aşağıdaki kurala göre yerleştirelim. İlginç bir şekilde bu işlemi kaç elemanla yaparsak yapaalım kesrin değeri her zaman 1/3 oluyor. Bunun nasıl gerçekleştiğini ispatlayabilir misiniz?

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots$$

Serdar Artuç , Isparta

(Bu soruyu Matematik Kulesi'ne gönderen okuyucumuzun adresine TÜBİTAK Yayınları'nın "Bir Matematikçinin Savunması (Godfrey H. Hardy)" adlı kitabı postalanmıştır.)

Moda Geçer Mod Kalır :

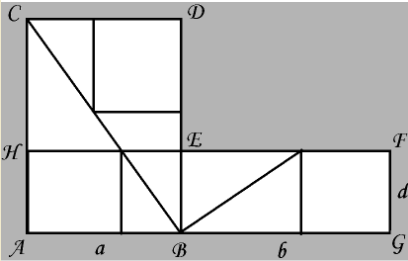
Mod hesabı kullanılmadığında işkenceye dönüşebilecek şu matematik sorusunu çözmeye çalışalım : 1'den 1991'e kadarki (1991 dahil) tek sayıların 1991. kuvvetlerin toplamı olan sayının birler basamağında hangi sayı vardır?

$$1^{1991} + 3^{1991} + 5^{1991} + \dots + 1991^{1991} = ?$$

Geçen ayın çözümleri

Tozlu Yapraklardan Bir Soru

BG = AC = b ve FG = HA = d olacak biçimde şekildeki gibi yeni bir dikdörtgen çizelim. Buna göre ilk çizilen ABDC dikdörtgeni ile sonradan oluşturduğumuz AGFH dikdörtgeninin alanları eşit olur. Tüm kenarların uzunluk değerlerini yazarsanız her iki dikdörtgende de aynı büyüklükte iki kare, iki küçük dik üçgen ve iki büyük dik üçgen olduğunu göreceksiniz. Bu durumda alan formülünden $a.b = (a + b).d$ yazabiliriz. $d = (a.b)/(a+b)$ olduğuna göre karenin alanı $d^2 = [(a.b)/(a+b)]^2$ olur.



Gizli Sayılar

Her sayının gruptaki diğer sayıların yarısı olması kuralına uygun olarak aşağıdaki denklemleri yazınız.

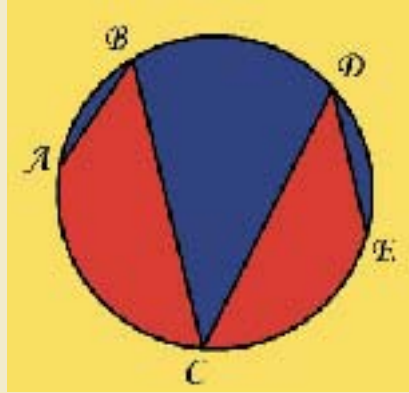
$$2a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$2a_2 = a_1 + a_3 + \dots + a_n$$

.....

$$2a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

Denklemleri taraf tarafa topladığımızda $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (n-1).(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ eşitliğini



Alanlar Eşit mi?

Daire üzerindeki ABCDE noktalarını şekildeki gibi birleştirelim. ABC, BCD ve CDE açıları 45 derecedir. Buna göre kırmızı alanlar ile mavi alanların birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

Asil Bir Aritmetik Dizi:

Terimleri doğal sayılar olan ve sonsuza giden öyle bir aritmetik dizi bulunuz ki, dizinin hiçbir terimi hem iki asal sayının toplamı hem de iki asal sayının farkı biçiminde yazılsın.

elde ederiz. Bu eşitliğin sağlanması için ya $n = 3$ olmalıdır ya da $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0$ olmalıdır. İkinci seçeneğin doğru olması için $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ olması gerekir. O halde $n = 3$ tür ve küçük bir denemeyle $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ olarak bulunur.

Hangisi Fazla?

$N = 1!2! \dots 100!$ sayısını açarak tekrar düzenleyelim : $N = 1.(1.2).(1.2.3) \dots (1.2 \dots 99.100)$ ve $N = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot \dots 99^2 \cdot 100$ olur. Üssü çift olan her terim bir sayının karesidir. N sayısının içindeki üssü tek olan sayıları da aşağıdaki gibi çift haline getirilim:

$$N = 2^{99} \cdot 4^{97} \dots 100^1 \cdot 3^{98} \cdot 5^{96} \dots 99^2$$

$$= (2 \cdot 2^{98}) \cdot (4 \cdot 4^{96}) \dots (98 \cdot 98^2) \cdot 3^{98} \dots 99^2$$

Üssü çift olanları $a^2 = 2^{98} \dots 98^2 \cdot 3^{98} \dots 99^2$ olarak birleştirirsek N sayımız $a^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 100$ 'e eşit olur. Bu da $N = a^2 \cdot 2^{50} \cdot (1 \cdot 2 \dots 50)$ ye eşit olur demektir. Görüldüğü gibi 50! kısmını N'den attığımızda bir sayının karesini elde etmiş oluruz

Yeni Yıla Merhaba

Sorumuz aslında genel bir teoremin özel bir halidir. 2'den büyük her n

N için $(n!)^2 > n^n$ olur. Gelin şimdi bunu kanıtlayalım:

$$(n!)^2 = n! \cdot n!$$

$$= (1 \cdot 2 \dots n)(n \cdot (n-1) \dots 1)$$

$$= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \dots (k \cdot (n-k+1)) \dots (n \cdot 1)$$

$2 \leq k < n$ koşulunu sağlayan her bir k için $k \cdot (n-k+1) = (n-k)(k-1) + n > n$ olması nedeniyle yukarıdaki ifadede $(n!)^2 > n \cdot n \dots n = n^n$ eşitsizliğini elde edebiliriz. Böylece soruda $(20032004!)^2 > 20032004^{20032004}$ olur.

Genç Matematikçiler

Geçen sayıda, Matematik Kulesi'nde bu köşeyi artık sizlerin gönderdiği matematik çalışmalarıyla paylaşacağımızı duyurmuştuk. Köşenin ilk konugu Ankara Fatih Sultan Mehmet Süper Lisesi 2. sınıfında okuyan Övgü Ceyda Güven. Övgü'nün okulundaki Bilim Şenliği'nde 1. olan projesi, sıfır dahil rakamları farklı 3,4,5,... basamaklı sayıların basamak değerleri toplamını bulma yöntemi üzerine. Kendisini tebrik ediyoruz ve italik yazılı açıklamalarımız ile birlikte projesinin özeti ni yayımlıyoruz.

Öncelikle 3 basamaklı sayıları inceleyelim. 0, a ve b rakamlarından oluşan 3 basamaklı sayıların basamak değerleri toplamını şu şekilde bulabiliriz: ilk başta rakamlar toplamını(RT) buluruz : $0 + a + b = RT$. Oluşturulabilecek 3 basamaklı tüm sayıların birler basamağı toplamı RT'ye, onlar basamağı ise $10 \times RT$ 'ye eşittir. Yüzler basamağı için $2 \times 10 \times RT$ formülünü kullanmamız gerekir.

M.K : Övgü'nün formülize ettiği bu hesaplamayı kolayca ispatlayabiliriz. 0,a,b rakamlarından 3 basamaklı, $2 \times 2 \times 1 = 4$ tane sayı yazılabilir. Yüzler basamağında 0 kullanamayacağımızdan diğer sayılardan 2'şer tane kullanırız ve böylece yüzler basamağının toplamı için $2 \times 10 \times RT$ formülünü elde ederiz. Onlar ve birler basamağında ise a ve b 1'er kez, sıfır 2 kez kullanılır. Bu sayede de RT ve $10 \times RT$ formüllerine ulaşmış oluruz.

4 ve 4'ten çok basamaklı sayılar için biraz daha farklı bir formül kullanmamız gerekiyor. Öncelikle 1'ler basamağının toplamını bulmalıyız. Örnek olarak 4 basamaklı sayıları araştırırsak elimizde 0,a,b,c rakamları vardır ($a+b+c = RT$). Sıfırdan farklı elemanlardan birini birler basamağına sabitlediğimizde $2 \times 2 \times 1 = 4$ tane farklı sayı oluşturulabiliriz. Bu da 1'ler basamağında örneğin a'nın 4 kere kullanıldığı anlamına gelir. Böylece birler basamağı toplamı $4 \times RT$ olur. Aynı şekilde onlar basamağı $10 \times 4 \times RT$ ve yüzler basamağı $100 \times 4 \times RT$ olur. Binler basamağı için $3 \cdot 2 \cdot 1 \times 1000 \times RT$ formülünü kullanmalıyız. 5 basamaklı sayıların onbinler basamağının toplamını bulmak istediğimizde $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 10000 \times RT$ formülü geçerli olur. Bu şekilde daha yüksek basamaklı sayılar için formülü değiştirebiliriz.

M.K: Övgü'nün bize gönderdiği yazısında bulunmayan n basamaklı sayılar için genelleştirmeyi ve ispatını şu şekilde yapabiliriz: Öncelikle sayıyı rakamları farklı oluşturamamız sebebiyle en fazla 10 basamaklı bir sayı yazabiliriz. n basamaklı sayı için birler basamağı toplamı şu şekilde bulunabilir: Örnek olarak sıfırdan farklı rakamlardan birini birler basamağına sabitleyelim. En büyük basamakta sıfırı kullanamayacağımızı dikate alarak $A = (n-2)(n-2)(n-3) \dots 2.1$ çeşit sayı yazabiliriz. A değerini rakamları toplamı ile çarptığımızda birler basamağının, $A \times RT$ 'yi 10 ile çarptığımızda onlar basamağının, 10^{n-1} ile çarptığımızda $(n-1)$. basamağın toplamını elde ederiz. n basamakta sıfırın kullanılmaması nedeniyle farklı bir formül ortaya çıkar. Yine sıfırdan farklı bir sayıyı n. basamakta sabitleyelim. Bu şekilde $(n-1).(n-2) \dots 2.1 = (n-1)!$ çeşit sayı yazabiliriz. Böylece rakamlar toplamı ile $(n-1)! \cdot 10^{n-1}$ çarparak n. basamağın toplamını elde ederiz.

Övgü'yü bu çalışmasından dolayı tebrik ediyoruz ve adresine TÜBİTAK yayınlarından "Matematik Sanatı (Jerry P. King)" adlı kitabı gönderiyoruz.