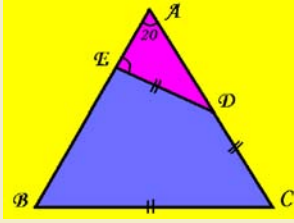




Açı Avlama



Geometri soruları çözmenin belki de en güzel tarafı, görülmesi gereken küçük bir noktayı hisleriniz bulduktan sonra çözümün bir çorap söküğü gibi gelmesi. İşte buna güzel bir örnek: Şekildeki ABC üçgeninde $AB = AC$ ve $ED = DC = BC$ 'dir. Üçgenin tepe açısı 20 derece olduğuna göre AED açısını bulabilir misiniz?

Özgür Yaşar Akyar, Afşin/K.Maraş

(Bu soruyu Matematik Kulesi'ne gönderen okuyucumuzun adresine TÜBİTAK Yayınları'nın "Matematik Sanatı (Jerry P. King)" adlı kitabı postalanmıştır.)

İrrasyonel Belirsizlik

a^b tipindeki sayılarda a ve b 'yi rasyonel aldığımız halde sonucun irrasyonel çıkabileceğini biliyoruz. Örneğin $a=2$ ve $b=1/2$ iken $2^{1/2}=1.414213...$ sayısı bir irrasyonel sayıdır ve kesirlerle ifade edi-

lemez. Şimdi gelin bu durumu bir de tersinden düşünelim. Acaba a ve b 'yi irrasyonel seçerek bir a^b rasyonel sayısı oluşturabilir miyiz?

Giz(em)li Asallar

Bazı sayılar o kadar yalındır ki bir bakışta o sayının asal olmadığını anlayırsınız. Örneğin 1000, 38492862, 6585435 sayıları ben asal değilim diye bağırarak sayıların küçük bir kısmı. Ancak sonsuzluk denizinin diğer üyeleri için durum hiç de böyle değildir. Genelde sayılar, kendilerine şüpheyle bakan gözlerle asallık sırlarını ilk aşamada pek açıklamazlar. Şimdi 1 ile başlayıp biten ve ...01010... şeklinde ilerleyen sayılara şüpheyle bakmanızı istiyoruz. 101, 10101, 1010101, ... gibi sayılardan acaba hangileri asal olma ayrıcalığını üzerinde taşıyor?

En Büyük Çarpım

Bir sayı alalım ve bu sayıyı diğer sayıların toplamı şeklinde yazalım. Ancak sayıyı öyle toplamalar cinsinden yazalım ki bu toplamı veren sayıların çarpımı en büyük değeri versin. Örneğin 10 sayısı $1+2+3+4$, $5+5$, $3+3+3+1$, $4+4+2$, ... şeklinde yazılabilir ve bu sayıların çarpımı sırasıyla 24, 10, 27 ve 32 olur. Amacımız en büyük çarpım değerini veren genel bir yöntem bulmak. Acaba bu mümkün mü?

gösterilebilir ki 7 ye bölünmeyen bir sayının karesi 7 ye bölündüğünde 1, 2, 4 sayılarından biri olur. m ve n nin kalanları farklı iken eşitliğin sağlanması mümkün değildir. O halde kalanları aynı olmalıdır ($m = n \pmod{7}$). Öyleyse $a = m^2 - n^2$ sayısı 7 ye bölünür. Sonuç olarak $7 \mid a.b$ 'dir.

En Büyük Alan

Soruda aradığımız cevap, dörtgenin dört köşesinin bir çember üzerindeyken ki durumu olacaktır. İlk olarak Pappus'un kanıtlaştığı "çevre sabit iken en büyük alanı bir çember verir" düşüncesinden hareketle cevabı kanıtlayabiliriz. Menteşeler yardımıyla çember ve dörtgenin şeklini değiştirelim. Bu durumda çember ile dörtgen arasında kalan alan değişmezken dörtgenin alanı küçülür. Tüm alanı maksimum yapmak için tekrar çember haline döndürmemiz gerekir.

Meksika Yarışı

Üstteki

Meksikalının

çizgiye göre ayna

görüntüsünü alalım ve diğer

Meksikalı ile birleştirilelim.

Elde ettiğimiz

A noktası yeşil şapkalı

Meksikalıya en fazla

avantaj sağlayan nokta olur.

Adil yarışı sağlayan

B noktasını bulmak için ise iki

Meksikalıyı bir doğru

parçasıyla birleştirilelim.

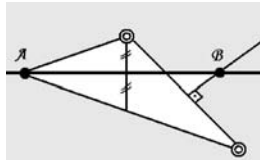
Bu doğru parçasının orta

noktasından çizdiğimiz dikme ile

varış noktasının bulunduğu çizginin

kesişme noktası bize B

noktasını verecektir.



Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Gizemli Kasaba

Bazen bir problemin matematiksel analizini yapmak için hiçbir sayıya gerek duyulmaz. Yapmanız gereken tek şey problemi anlamak, sistematikleştirmek ne genelleştirmek olur. Matematiğin, birbirleriyle karmaşık ilişkiler içeren sayılardan ibaret olduğunu düşünen kişilere (tabi ki sizden bahsetmiyorum) bu yazı sanırım güzel bir cevap olacak.

Şimdi gelin hep birlikte gizemli bir kasabaya gidelim. Bu kasabadaki her kadın, kendi eşi hariç diğer erkeklerin yaptığı sadakatsizlikten hemen haberdar oluyor. Kasabada yaşayan her kadın çok zeki olmakla birlikte, kasabadaki diğer kadınların da çok zeki olduğunu biliyor. Kasabada şöyle bir yasa geçerli: bir kadın eşinin kendisini aldatıldığını kanıtladığı gün, güneş batmadan kocasını vurmak zorunda.

Kasabada huzur dolu günler yaşanırken bir gün hiç yalan söylemeyen ve tüm kasabalıların güvendiği bir kişi çıkar ve der ki "bu kasabada en az bir kadın aldatılıyor". Şimdi sorumuz şu: gerçekte kasabada 40 sadakatsiz erkek varsa (bu sayıyı kadınlar bilmiyor), bu ilanın ardından kasabada yaşanacak olayları kestirmeniz mümkün mü?

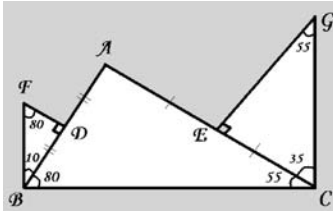
Matematiksel düşünce sistemini kullanıyorsanız, evet mümkün! Sorunun cevabı sessiz geçen 39 günün ardından 40. gün güneş batmadan yaşanan 40 cinayet olacak. Bu cevabı anlamak ilk başta çok kolay gözüküyor. Oysa kasabadaki sadakatsiz erkek sayısını bire indirdiğimizde çözümü daha kolay anlayabiliriz. Böyle bir durumda güvenilir kişinin söylediği sadece aldatılan Bayan X'e yeni bir bilgi verir. Başka aldatılan kimseyi tanımayan Bayan X, aldatılan kişinin kendisi olduğunu anlar ve o gün güneş batmadan eşini vurur. Peki sadakatsiz erkek sayısı iki ise ne olur? Bu sorumda aldatılan Bayan X ve Bayan Y dışındaki herkes iki olaydan haberdardır. X ve Y ise sadece diğerinin aldatıldığını bilir. Aldatan en az bir erkek olduğunun ilanından sonra Bayan X ve Y, o gün diğerinin kocasını vurmasını bekler. Ancak böyle bir olay gerçekleşmez. Bu demektir ki diğeri başka bir aldatılardan haberdardır o da ne yazık ki kendisinden başka biri olamaz. Sonuçta ikinci gün sonunda güneş batmadan Bayan X ve Bayan Y tüm gerçekleri anlatarak kocalarını vururlar. Bahsettiğimiz mantığı 3 aldatan koca için de kurmak mümkün. Bu durumda 2 sessiz gün geçecek ve 3. günde üç cinayet işlenecektir. Artık aradığımız sonuca ulaşabiliriz. 40 sadakatsiz erkeğin yaşadığı kasabada 39 gün sessiz sakin geçecek, 40. gün aldatılan 40 kadın gerçeğin farkına vararak kocalarını vuracaklardır.

Soruyu çözdüğümüzü artık gönül rahatlığıyla ilan edebiliriz. Dikkat ederseniz 40 kişilik karmaşık problemle uğraşmak yerine önce soruyu basitleştirdik, sonra çözümü sistematikleştirdik ve en sonunda genelleştirdik. Böylece o büyüleyici matematiksel mantık, tüm çıplaklığı ve güzelliğiyle gözler önüne seriliverdi. Böyle bir güzellik karşısında matematiğe aşık olmamak mümkün mü?

Geçen Ayın Çözümleri

Bilinmeyen Çarpım

Soruda verilen diklik özelliklerini kullanarak şekildedeki açılar yerleştirdik. Daha sonra FDB ve GCE dik üçgenlerinde $FB = AB/(2.\sin 80)$ ve $GC = AC/(2.\sin 55)$ eşitliklerini trigonometri yardımıyla elde ettik. Bu durumda $FB \times GC = (AB \times AC)/(4.\sin 80.\sin 55)$ 'e eşit olur. Sıra geldi sinüs teoremini kullanmaya. Teoreme göre



$AB/\sin 55 = AC/\sin 80 = BC/\sin 45$ 'dir. Dikkat ederseniz;

$$\frac{AB \times AC}{4.\sin 80.\sin 55} = \frac{BC^2}{4.\sin^2 45} = FB \times GC$$

olur. $BC = 5$ olduğuna göre $FB \times GC = 12,5$ 'dir.

Tam Bölüm

a ve b 'nin aralarında asal olduğunu göz önüne alarak eşitliği tekrar yazalım: $a^2 + b^2 = (c^2)^2$. Bilindiği gibi Pisagor denklemlerinde $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ ve $c^2 = m^2 + n^2$ eşitliklerini veren mutlaka m ve n doğal sayıları vardır. Biz $7 \mid ab$ (7 böler $a.b$) olduğunu kanıtlamak istiyoruz o halde sadece $7 \mid b$ veya $7 \mid a$ olduğunu kanıtlamak yeterli. Farz edelim ki 7 b'yi tam bölmesin. Bu durumda 7 , m ve n 'yi de tam bölemez. Kolayca