



Radyo İstasyonu



Radyo istasyonu kurmak isteyen bir kişi, matematik bilginize güvenerek sizden yardım istiyor. Bu kişinin istasyonu kuracağı yer ile ilgili tek bildiği, şehirdeki herhangi iki ev arasındaki mesafenin en fazla 4 km olduğu.

Acaba istasyon kaç km çapında bir daireye yayın yapmalıdır ki tüm evler bu yayını dinleyebilsin?

Sıfırların Bolluğu

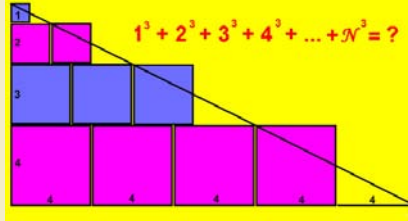
Faktoriyel hesaplarında bir ünlem işareti sayıyı o kadar çok büyütür ki insan sonucu gördüğünde şaşırmasın edemez. Bunu sınamanız için 100! sayısının (100.99....3.2.1) sonunda kaç sıfırın olduğunu bulmanızı istiyoruz. Sonuca ulaştığınızda sıfırların bolluğu, ekonomide sıfırlara alışık olmamıza rağmen emin siz de şaşırtacaktır.

Yalancı Asal Sayılar

“Matematiğin Şaşırtan Yüzü” bölümünde de

bahsettiğimiz gibi Küçük Fermat Teoremi'ndeki $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ eşitliğini sağladığı halde asal olmayan p sayıları da vardır. Örneğin $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$ olmasına rağmen 341 sayısı asal değildir (11x31). Acaba yanılgıya neden olan $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterebilir misiniz?

Geometrik Formül



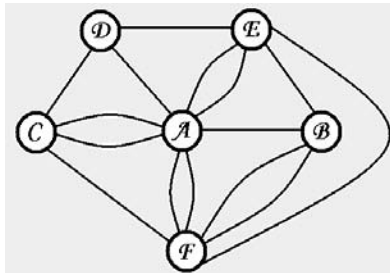
Bu soru sayesinde geometri ile diziler arasındaki ilginç bir ilişkiye tanıklık edeceğiz. Sizce nasıl oluyor da yukarıdaki karelerden oluşan geometrik şekil, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + N^2$ gibi bir dizinin sonucunu verebiliyor? (Örnek olması için çizimde N=4 olarak alınmıştır.)

9'lar olur. S(x), x sayısının rakamları toplamını temsil ettiğine göre $S(a) + S(b) = 9.2003 + 10 =$ “tek sayı”dır. Oysa $S(a) + S(b) = 2S(a)$ bir “çift sayı”dır. İşte aradığımız çelişkiyi yakaladık.

Şüpheli Bir Üçgen

Soruda bahsedilen kenara veya kenar doğrultusuna indirilen dikmeler, yükseklikten başka bir şey değildir! Eğer yüksekliklerinin oranı 1:2:3 şeklinde ise karşısındaki kenarların oranı da sırasıyla 6:3:2 şeklinde olmalıdır. Sebebine gelince; (kenar x yükseklik)/2 değeri sabit bir sayı olan alanı verir. Bu durumda (kenar x yükseklik) sabittir. Bilindiği gibi üçgende 2 kenarın toplamı 3. kenardan küçük olmaz. 6, 3+2'den daha büyük olduğu için böyle bir üçgenin olması mümkün değildir.

Königsberg'e Yeni Köprüler



Königsberg şehrinin yeni haritasını şekildedeki gibi bir grafa dönüştürdük. Geçen sayımızda tüm köprülerden sadece bir kere geçerek başlanılan noktaya geri dönme koşulunun tüm noktalara (kara parçalarına) çift sayıda çizginin (köprünün) değmesi olduğunu açıklamıştık. Bu durumda Königsberg'te böyle bir tur atamayız. Ancak sadece D ve E noktalarına tek sayıda yolun ulaşması nedeniyle D noktasında başlayıp E noktasında biten bir yolculuk yapabiliriz.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

KÜÇÜK FERMAT TEOREMİ

Çoğumuz Fermat'ı o meşhur “son” teoremi ile tanısak da (“ $x^n + y^n = z^n$ eşitliğinin x, y, z pozitif tamsayı ve $n > 2$ iken çözümü yoktur”) doğrusunu söylemek gerekirse Fermat'ın “küçük” teoremini ezici bir üstünlükle daha çok kullanırsanız matematik dünyasında. Bir çeşit gizli kahramandır “Küçük Fermat Teoremi”. İşte bu yüzden sizlere tanıtabilmek amacıyla bu ayki yazımızı isminden daha büyük olan Küçük Fermat Teoremi'ne ayırdık.

$n \in \mathbb{N}$, p asal ve $p \nmid n$ ise ;

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

1601 - 1665 yılları arasında Fransa'da yaşayan ve en büyük amatör matematikçi olarak kabul edilen Pierre de Fermat'ın asıl mesleği hakimlikti. Buna rağmen sayılar teorisine yaptığı sayısız katkılarla ismini matematik tarihine - hem de en büyük puntolarla - yazdırmayı başardı. Sahip olduğu haklı şöhretini kendisine kazandıran en önemli teoremlerinden biri ise en ünlü teoreminden ayırt edilebilmesi için “küçük” lakabı takılan Küçük Fermat Teoremi idi. Fermat'ın keşfettiği ama huyu gereği ispatını yapmadığı teoremini şu şekilde tanımlayabiliriz:

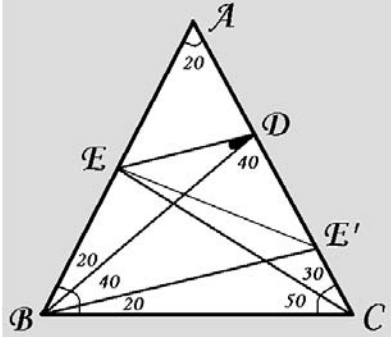
n bir doğal sayı, p'nin ise bir asal sayı olması ve p'nin n'yi tam bölmemesi koşulluyla $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 'dir.

İlk görüşte belki çok bir şey ifade etmiyor teorem. İsterseniz gelin bir örnekle açıklamaya çalışalım. Mesela elinizde bir sayı var ve bu sayının asal olduğundan şüphe ediyorsunuz. Yapmanız gereken p olarak bu sayıyı almak ve p'nin katı olmayan rasgele bir n sayısını seçmek. Eğer $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ise 1'e eşit değilse p sayısının asal olmadığına emin olabilirsiniz. Ancak eğer 1'e eşit çıkarsa bu kesin asal olduğunu göstermez. Buna “gerekli ama yeterli olmayan koşul” denir. Bu teoremin günümüzde matematikçiler arasında hala devam eden asal sayı bulma yarışında ne kadar fayda sağladığını tahmin bile edemezsiniz. En basitinden $n = 3$ ve $p = 5$ olarak alırsak $3^{5-1} \equiv 1 \pmod{5}$ 'tir. Öte yandan $n=3$ ve $p=8$ iken $3^{8-1} \not\equiv 1 \pmod{8}$ 'dir.

Şimdi biraz da bu güzel teoremin ilk olarak Leibniz'in tamamladığı ispatına değineceğiz. Yalnız baştan uyaralım, biraz karışık olan ispatı anlamak için kağıt ve kalem şart! İlk önce mod p'de n, 2n, ..., (p-1)n sayılarını düşünelim. Siz de birkaç denemeye göreceksiniz ki bu sayıların mod p'deki karşılığı sıfırdan ve birbirinden farklı sayılardır. p'den küçük ve p-1 tane sayı ancak 1'den p-1'e kadarki ardışık sayı dizisi olabilir. O halde şunu yazabiliriz: $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot (p-1)n \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$. Biraz düzenlersek; $n^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$ eşitliğine ulaşırız. Sadeleştirmeyi de yaparsak tüm yalnlığıyla o aradığımız eşitliğin bize gülümseydiğini görebiliriz: $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Geçen Ayın Çözümleri

Gizli Açı



Şekilde görüldüğü gibi E'BC açısı 20° olacak şekilde E'B doğru parçasını çizelim ve bilinen açıları yerleştirelim. Bu durumda BE'C üçgeni ile BCE üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu görmek zor olmayacaktır. Bir diğer ikizkenar üçgen de E'DB üçgenidir. O halde BE = BC = BE' ve EBE' açısı 60° olduğundan BEE' üçgeni eşkenar üçgen olur. Dikkat ederseniz EE' = BE' = DE' eşitliğine ve EE'D üçgeninin de ikizkenar olduğu yargısını elde ettik. EE'D = 180 - 80 - 60 = 40° ve E'DE = 140 / 2 = 70° 'dir. Artık sonuca ulaşmak için yapmamız gereken tek bir işlem kaldı:
 $BDE = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Sayılarla Oyun

Verilen a sayısının rakamlarının yerlerini herhangi bir şekilde değiştirilerek b sayısını elde edelim. Eğer a sayısının son rakamı sıfır değilse bu durumda b'nin son rakamı sıfır olduğunda sonuç 10 olur. Varsayımımıza göre $a + b$ 2004 tane sıfır içeren 100...000 sayıdır. O halde geriye kalan 2003 tane basamaktaki rakamların toplamı