

HİPERBOLİK GEOMETRİ

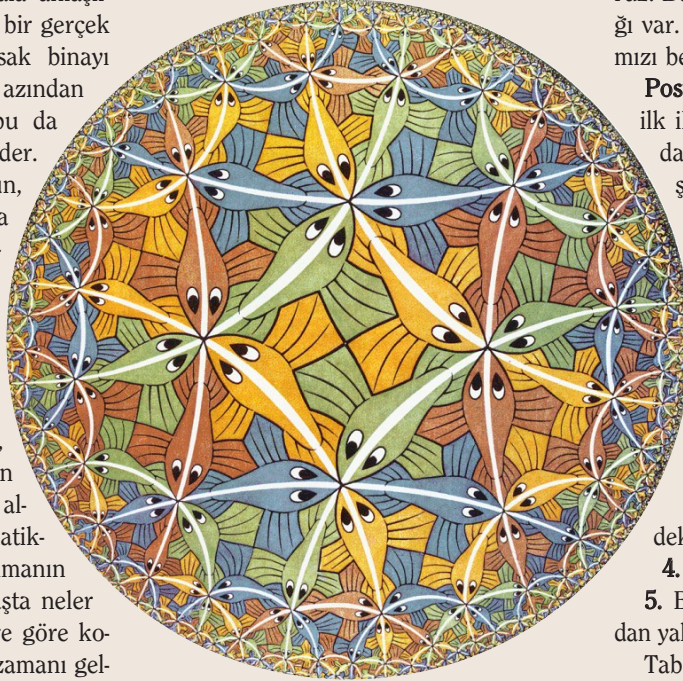
bir kuramın başlangıç öyküsü...

Hiç düşündünüz mü bir matematik kuramı nasıl üretilmeye başlıyor, ilerliyor, büyüyor ve bir kule haline geliyor diye? Nedense, ilerlemesine hep birinci elden tanık olurken, olayın kaynak kısmından hep habersiz oluruz. Belki bu nedenle yıllardır okumamıza karşın matematik hala çok zor, hala anlaşıl-maz, hala çok karmaşık. Şu bir gerçek ki, temeli sağlam atmadysak binayı sağlam kuramayız. Ama, en azından problemin farkındayız ve bu da onu çözümlemenin yarısı eder. Madem matematik bir oyun, her oyunda olduğu gibi onda da kurallar baştan belirlenmiş olmalı. Bu kurallardan haberdar değilseniz, nasıl doğru oynayabiliriz ki. Oynamaya mecbursak (ki ilk orta lise ve üniversite hayatımız boyunca bu böyleydi), sıkça hata yaparız ve en önemlisi, oyundan zevk de almıyoruz! Öyleyse, artık matematiksel yöntemden haberdar olmanın bir kuram üretilirken en başta neler gerektiğinin, yasaların nelere göre konulduğunun farkına varma zamanı geldi. Hemen “bu ileri matematikçilerin konusudur” deyip kenara çekilmek yok! Sizi kaçırmamak için şu ipucunu da erkenden iletelim: Bu yasalar tamamen sezgisel ya da keyfi olarak konuyor. Eğer geometri sözcüğünü duyduysanız, matematiksel yöntemi anlamak için ilk ve en büyük adımı atmışsınız demektir. Çünkü bu konuyu, en temel ve en eski aksiyomatik(!) sistemlerden birisi olan Öklid geometrisiyle gayet güzel açıklayabiliriz.

Aksiyomatik Sistem

Matematiği anlamak için tümdenge-lim yöntemini kavramamız gerekir. Aksiyomatik bir sistem tanımsız terimler, tanımlar, aksiyomlar (belit veya postulat olarak da bilinir) mantık sistemi ve teoremlerden ibarettir. Ayrıca tutarlılık, eksiksizlik ve birbirinden bağımsız aksiyomlarla oluşturulmuş olmak gibi özel-

likleri de vardır. Pek çoğu (şimdilik) anlaşıl-maz görünen bu ifadeler bir kura-mın iskeletini oluşturur. İskeleti inşa edilmiş bir yapının bitince az çok neye benzeyeceğini kafamızda canlandırabili-riz. O zaman matematiksel yöntemi bu iskeleti tanıyarak keşfetmekten daha



Ölümsüz usta Escher'in verdiği birbirine simetrik sonsuz şekilden oluşan bu çizimi hiperbolik geometrinin disk modellemesine hoş bir görsellik katmış...

mantıklı bir iş olamaz. Bu işin en zevkli yanıysa iyi bildiğimiz bir örnek üzerinde, Öklid geometrisinde, çalışmak!

Öklid Geometrisi

Tanımsız terimler: “Ne engel olabilir ki bir terimi tanımlamaya” diyorsanız, önce tanımın tanımı kavramak lazım derim. Tanım (matematikte) en basit haliyle şöyle açıklanabilir: Okunduğunda herkesin kafasında aynı şeyi canlandırabileceği türden evrensel bir ifade. İşte Öklid geometrisindeki tanımsız terimler ve belirsiz açıklamaları:

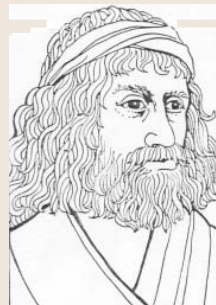
nokta: hiç parçası olmayan nesne
doğru: genişliği olmayan uzunluk
düzlem: uzunluğu ve genişliği olan yüzey

İşte gerçek anlamda tanım olmayan bu cümleleri daha fazla genişletmeye çalışınca bir kısır döngüye giriveriyoruz. Bu nedenle onların dokunulmazlığı var. Şimdi de bu terimlerle yasalarımızı belirleyelim:

Postulatlar: Bunlara tanımlanmayan ilk ilkeler de diyebiliriz. Sezgisel ya da keyfi olarak konabilir ancak üç şartımız var hiçbir cümle diğerini ima etmesin (bağımsızlık), eksiksiz ve tutarlı olsunlar; yani kendi içinde bir çelişki yaratmasınlar. İşte Öklid'in postulatları:

1. İki noktadan bir doğru geçirilebilir.
 2. Sonlu bir doğru, istenildiği kadar uzatılabilir.
 3. Çember, merkez ve üzerindeki bir nokta ile tarif edilebilir.
 4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
 5. Bir doğruya, dışındaki bir noktadan yalnızca bir paralel doğru çizilebilir.
- Tabii bunların yanı sıra, Öklid'in genel kabulleri de vardı. Bunlar, bize gayet açık görünen, ispatlanmaya gerek duyulmayan cümlelerdir. Örneğin, aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir ya da bir bütün, herhangi bir parçasından büyüktür gibi... Uzun lafın kısası, bu kadar bilgidan hepimizin bildiği geometri üretilmiş (tabi tanımlar da var). Hatta en ekonomik olsun, postulat sayısı az olsun diye tutturan pek çok matematikçinin 5. postulat yüzünden uykuları da kaçmış.

Herşey iyiydi hoştu; ama bu 5. postulat (paralellik postulatı) nedense diğerlerinden çıkı-yormuş gibi geliyordu çoğuna. Bu da bağımsızlık ilkesine aykırı bir durumdu! Tamam, kendisi bir teorem olabilirdi; ama bir aksiyom değildi sanki... Bu uğurda çaba harcayan matematikçiler, diğer 4 postulatı birleş-



tirip 5.yi çıkarmaya çalıştılar, pek çok yeni teorem ürettiriler; geometri genişledi; ama istedikleri sonuca varamadılar. Fakat henüz savaş bitmemişti. Çünkü, bu işi çözmenin bir yolu daha vardı: Paralellik postulatının tersini alıp, diğer postulatlarla arasında çelişkiyi yakalamaya çalışmak!

Bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç paralel çizilemez ya da 1'den fazla (yani sonsuz tane) paralel çizilebilir...

0 mı, 1 mi yoksa sonsuz mu?

Matematikçiler Öklid'in açığını yakalamaya çalışırken, yeni kuramlar üretebileceklerinin farkında değillerdi belki de... Sözü matematiksel yöntemden açtık ve buralara kadar geldik. "Peki varmaya çalıştığımız nokta ne?" diye soruyorsanız, cevabınızı kısa bir zamanda alacaksınız. Hepimiz toplamayı 10'luk sistemde yapmaya alıştık. Örneğin, "18+16 için:8, 6 daha 14, 4'ü yaz, elde var 1..." Onluk sistemi bırakıp da 3'lük sistemde toplama yapmaya geçsek, alışana kadar karmaşık gelir bize. "21+12 : 2, 1 daha 3, 0 yaz, elde var 1..." 10'luk sistemde herşeyi otomatik yaparken, 3'lük sistemde bir parça kafa çalıştırmak gerekiyor. Ama böylece toplamayı, sayı sistemlerini daha iyi kavrayabiliyoruz. Kanıksaması zor olur, alışılır, ama yine de insanın ilk göz ağrısı gibisi yok. İşte şimdi, yalnızca bir postulat değiştirerek başka geometrilerin dünyasına gireceğiz. Başlangıçta yadırgayabilirsiniz, şimdiden haberiniz olsun: Çünkü doğruyu, üçgeni, çokgeni baştan tasarlayacağız. Fakat Öklid'in sistemindeki bir parça değişiklik yaparak kurulan bir aksiyomatik sistemin ortaya nasıl yeni kuramlar çıkardığına, hep birlikte tanık olacağız ve gözlerimizi açık tutup eski kavramları (paralellik, uzunluk, açı, alan) yeniden yorumlayıp öyle her aklımıza gelene inanmayacağız. Ne de olsa iyi bir matematikçi (adayı) olmanın yolu, şüpheli ve biraz da muhalif olmaktan geçer.

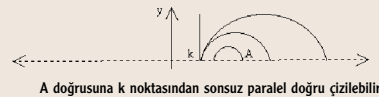
5. Postulat= Üçgenin İç Açıları 180°

Öncelikle bilmemiz gereken bazı gerçekler var. Matematikte iki ifadenin söylemek istediği aynı kapıya çıkıyorsa

ve o kapı da aynı anda bu ifadelere açıyorsa, bunlar denk ifadedir. Bizim 5. postulatın pek çok denkliği var. Bunlardan en ünlüsü, herhalde "bir üçgenin iç açıları toplamı 180°'dir" cümlesi. İşte bu yüzden, 5. postulatı değiştirince üçgenlerin iç açıları toplamı değişiyor 180° den fazla ya da eksik oluyor; ama asla 180° olmuyor. Artık psikolojik olarak yeni tanımlara yeterince hazırlandık. Oldukça ünlü olan ve küre üzerinde modellenen her doğrunun ille de kestiği eliptik geometriden (Riemann Geometrisi) bu yazıda pek bahsedemeyeceğim; belki daha sonra... Benim asıl (kısaca) tanıtmak istediğim, Hiperbolik Geometri. Yani (yukarıdaki) 4 postulat+bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz tane paralel çizilebilir...

Hiperbolik geometri:

İki doğrunun birbirine paralel olması demek, asla kesişmemeleri anlamına gelir. Şimdi biz öyle bir model tasarlayacağız ki, bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz tane paralel (kesiymeyen) doğru geçirebilelim. Geometri-mizin uzayı, analitik üst düzlemin üst yüzeyi ve doğru diye adlandıracağımız çizgiler de x eksenine dik Öklid doğruları ya da merkezi x ekseninde olan Öklid yarım daireleri. Örneğin, yatay bir doğru artık doğru değil:

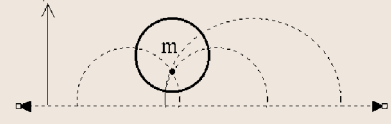


Daha önce uyarımtım "doğruları baştan tasarlayacağız" diye. "Ama bunlar doğru değil ki, eğri!" demeyin sakın! O eskidendi...

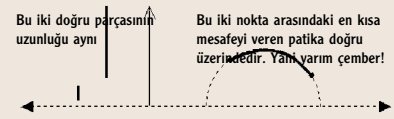
Doğru Çember Oldu, Çember Ne oldu?

Çember, belirlenmiş bir merkezden (belli) sabit uzaklıktaki noktalar kümesi. Çember çizebilmek için, uzaklık kavramını hatırlamak lazım. Uzaklık, yani iki nokta arasındaki en kısa uzunluk, doğruyla ölçülüyor. Madem doğru ve doğru parçalarının tipi değişti, o zaman yarıçaplar da biraz değişikliğe uğradı. Buna karşın bu yeni geometride çember yine çember şeklinde çıkıyor; ama merkezi tam eskisi gi-

bi ortada değil. Yarıçaplar da eskinin eğrileri gibi oluyor:



Burada m merkezli çemberin yarıçapları yarım daire parçacıkları ve (pek belli etmese de) hepsinin uzunlukları bu geometride birbirine eşit. Hazır uzunluktan bahsetmişken, bir kaç örnek vereyim. X-ekseni uzaya dahil değildir, uzayın sonsuzu gibi davranır, bu nedenle, onun yakınlarında bize çok kısa görünen mesafeler aslında çok uzundur:



Peki ya Üçgen?

Üçgen: 3 doğrunun arasında kalan bölge...istediğiniz üç doğruyu çizin; arada kalan kısım bir üçgendir. İşte size bir kaç örnek:



Aynı şekilde bir paralelkenar çizebiliriz. Karşılıklı kenarları paralel olan 4 doğrunun arasında kalan alan!



Hiperbolik geometride daha çalışılacak pek çok kavram var: Elbette uzunluk ve alan hesabı, simetrier, daha bir çok geometrik özellikler... Hatta, isterseniz çalıştığımız uzayı değiştirip aynı geometriyi oturtabilirsiniz. Örneğin, Poincare disk modelinde, birim diskin içine bu koskoca geometri sığdırabiliyor.

İsterseniz, gözünüze kestirdiğiniz başka aksiyomu değiştirip yeni bir geometri üretilir sizde ünlü bir (amatör) matematikçi olabilirsiniz. Ama gözünüzü açık tutup her kavramın asıl tanımını ve çalıştığınız uzayı değiştirip aynı geometriyi oturtabilirsiniz. Örneğin, Poincare disk modelinde, birim diskin içine bu koskoca geometri sığdırabiliyor.

Nilüfer Karadağ