

# MÜZİK FOURIER ↔ ANALİZ MATEMATİK

Matematiğin derin felsefesini anlamaya çalıştığım öğrencilik günlerimden aklımda belki de hayat boyu silinmeyecek bazı anılar kaldı. Bunlardan biri de zamanımın ve paramın çoğunu harcadığım kırtasiye dükkanında geçiyor. Kitabımın eksik basılmış sayfalarını çekirtmek üzere her zaman gittiğim kırtasiyede fotokopilerimin çekilmesini bekliyordum. Bu arada da gözümü etrafta gezdirip alışveriş açlığımı nasıl doyurabilirim acaba diye raflara bakmaktan da geri kalmıyordum. Tam bu sırada içeriye mahallenin delikanlısı tavırlarında tipik bir genç girdi. Kendine has bir selamı işini yapmakta olan arkadaşına verdikten sonra fotokopisini çektiği kitaba biraz daha yakından bakmak için eğildi. "Demek Arapça kitapların da fotokopisini çekiyorsun" dedi bilgiç bir tavırla. Gözlerim fal taşı gibi açılmış onları izlerken arkadaşının karizmasını dağıtmak istemeyen dükkan sahibi eliyle ağzını kapatarak "Yok oğlum, bu matematik kitabı" dedi... Üniversiteye ilk adım attığım haftalarda bana da garip gelmişti karşıma çıkan matematik kitapları. İçlerinde bir sürü garip sembol ve tanınmadık harfler. ( $\alpha$  ve  $\beta$  yetmemiş bütün Yunan alfabesinin harflerini kullanmışlardı) Üstelik bazılarında sayfa numarasından başka sayı da yok diye söylenirdim kendi kendime. Ama yine de Arap Alfabesini andırdığını hiç düşünmemiştim doğrusu...

Aslında durum oldukça açıktı. Bilmediğin, tanımadığın bir dili ne yazabilirsin, ne konuşabilirsin, ne de okuyabilirsin, emek verip öğrenmek gerektirir. Aksi halde bir tercümana ihtiyaç duyarsın. Matematiğin de kendine has bir dili var. Nasıl Türkçeyi İngilizceye çeviriyorsak, Türkçeyi ya da başka herhangi bir dili (bir karşılığı varsa eğer) matematiğe çevirebiliriz. Nasıl mı? Basit! Aslında bu işi 6.sınıftan beri problemler adı altında öğreniyoruz;

Bir sayının 3 fazlasının 5 katı, kendisinin 4 eksiğine eşittir. Bu sayı kaçtır? Şeklinde bir soruyu hatırlayın. Bir sayı emektar 'x' idi.

$(x+3).5=x-4$   
İşte çevirme işi tamamlandı. Bundan sonrası yani denklem çözümü matematiğin işi. Sonuca ulaştınca onu da Türkçeye çeviririz.

Galileo "Doğanın muazzam kitabının dili matematiktir" derken matematiğin başlı başına bir dil olduğunu açıkça ifade etmiştir. Matematiğin de bir dil olduğu üzerine bu kadar yazdıktan sonra bu dili öğretmeye çalışacağımı sanıyorsanız, üzgünüm ki sizi hayal kırıklığına uğratacağım. Çünkü bu, matematikçilerin işi. Ben daha çok hangi dillerin matematiğe çevrileceği konusu üzerinde durmak istiyorum. Tabii ki Türkçe çevrilebiliyorsa bütün konuşma dilleri de çevrilebilir, ya başka?!...

$$A = \frac{\sum_{j=1}^n \omega_j F_j}{\sum_{j=1}^n \omega_j}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad A_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \omega_j F_j}{\sum_{j=1}^n \omega_j}, \quad j \in [0, n], \quad \omega_j < 0$$

$$A_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \omega_j F_j}{\sum_{j=1}^n \omega_j}, \quad \forall j \in [0, n], \quad \omega_j < 0, \quad A - K = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i F_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} - K$$

$$A_2 = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k F_k}{\sum_{k=1}^n \omega_k}, \quad \forall k \in [0, n], \quad \omega_k > 0, \quad \left( \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i}{\sum_{i=j+1}^n \omega_i} \times K - \frac{\sum_{i=1}^j \omega_i F_i}{\sum_{i=j+1}^n \omega_i} \right)$$

$$A - K = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i F_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} - K, \quad A_2 = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k F_k}{\sum_{k=1}^n \omega_k}, \quad \forall k \in [0, n], \quad \omega_k > 0$$

$$A - K = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i F_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \times \frac{\sum_{i=j+1}^n \omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} - \left[ K - \frac{\sum_{i=1}^j \omega_i F_i}{\sum_{i=1}^j \omega_i} \times \frac{\sum_{i=1}^j \omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right]$$

## Biraz Müzik

Hep düşünmüşümdür matematik ve müzik arasındaki ilişkiyi. Çünkü çok alakalı olduğu söylenir ama müzik öğretmenlerimden aldığım cevaplar bana hiç de öyle alakalı olduklarını düşündürmemiştir. Sol anahtarının yanına yazılan birkaç rakamdan ya da notaların, susların adına verilen oranlardan ve sayılardan ibaret ise bence üzerine bu kadar konuşmaya değmezdi. O zaman kendi başımın çaresine bakıp konuyu daha temelden incelemeye başlamak durumundaydım. Çünkü müzik dilinin kurallarını bilmeden onun matematik diline nasıl çevrildiğini anlayamazdım. Galiba sonunda ağızımdaki baklayı çıkardım. Birazdan, sabırla birkaç bilgiyi öğrendikten sonra, müziğin matematiğe nasıl çevrildi-

ğini inceleyeceğiz.(Sabır istiyorum çünkü yaptıklarımız size önce alakasız gibi görünebilir)

## Biraz Fizik

Önce sesin ne olduğuna dair bilgilerini tazeleyelim sonra da müzik ile gü-rültü arasındaki ayrımı yapabiliriz. Duyduğumuz ses, titreşen nesnelerin yarattığı ses dalgalarının hava aracılığı ile kulağımıza ulaşmasıdır dersem sesi çok da-raltarak açıklamış olurum ama şimdilik bu kadarlık bilgi yeterli olur. (örneğin aracı olarak sadece hava demek eksik olur. Katı, sıvı ve gazlar aracı olabilirler). Öyleyse ses dalgalar halinde yayılır. Mesela bir gitarı çaldığımızda titreşen teller, hava moleküllerinin aynı şekilde titreşerek birbirine çarpmasını sağlar. Yani teller enerjisini o moleküllere aktarır. Her molekül bir diğ-erini titreştirerek bu dalgaların kulak kepçemize kadar ulaşma-sını sağlar.

## Biraz da Biyoloji

Sesler yani dalgalar yeterince güçlü ise kulak kepçesinde toplanır ve dış kulak yoluna iletilir. Bu kanalın sonunda yer alan kulak zarına ulaşan titreşimler ortakulaktaki çekiç-örs-özengi adlı kemikleri (aynı şekilde) titreş-tirdikten sonra oval pencere adlı zara ge-tirilir, buradan da iç kulağa aktarılır. Tit-reşimler, iç kulak kanallarındaki sıvılar-da dalgalar halinde ilerleyerek Corti or-ganını uyarır. Uyarılar sinirlerle beyne taşınarak gitar tellerinden çıkan melodi-nin işitilmesi sağlanır. Anlatması uzun sürdü ama bu, saliseler içinde gerçekle-şen bir olay.

## Artık Biraz da Matematik

Gitar telleri titreşedursun, biz biraz da matematik yapmaya koyulalım. İşe pe-riyodik fonksiyonun tanımıyla başlayabi-liriz. Bir f fonksiyonu alalım öyle olsun ki

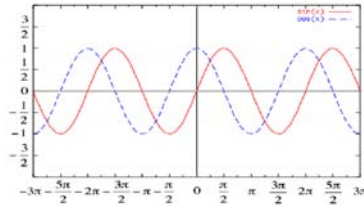
$$f: A \rightarrow B, \forall x \in A \text{ için } f(x) = f(x+T)$$

Eşitliğini sağlayan sabit bir T sayısı bulunsun. F fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T'ye de f fonksiyonunun periyodu denir. Yani periyot kelimesinin sezdirdiği üzere fonksiyon kendini T kadar da bir tekrarlıyor. Bizim işimize lazım olan, kendisini T zamanda bir tekrarlayan fonksiyonlardır. Hazır yeri gelmişken şunu da söylemeden geçemeyeceğim; İki periyodik fonksiyonun toplamı da periyodik bir fonksiyon verir (bu yeni fonksiyonun periyodu ayrı ayrı periyotların toplamına eşit değildir, O.K.E.K.lerine eşittir).

Yine fizik derslerinden hatırlarsanız frekans da periyodun çarpmaya göre tersi idi:

$$F=1/T$$

Matematikte en sık karşılaşılan periyodik fonksiyonlar periyodu  $2\pi$  (haliyle frekansı da  $1/(2\pi)$ ) olan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıdır. Belki emektar matematik öğretmenlerimizin dalgalanan grafikler diye aklımıza sokmaya çalıştıkları bu grafiklerin görüntülerini hatırlayınız vardır.

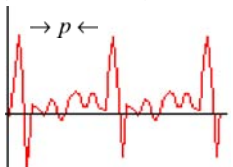


## Ses Dalgası ve Dalgalanan grafikler

Sanırım yavaş yavaş sadede geliyorum. Şimdi gitar teline geri dönelim ve artık öğrendiklerimizi hayata geçirelim. Telin 1 saniyedeki titreşim sayısı bize duyduğumuz sesin (ya da kulak kepçemize yaklaşmakta olan dalganın) frekansını verecektir. Frekansı 19. Yüzyılda radyo dalgalarının nasıl oluştuğunu keşfeden bilim adamına ithafen Hertz ile ölçüyoruz

$$1 \text{ Hertz} = 1 \text{ titreşim/saniye}$$

Telin saniyede 300Hz ile titreşmeye başladığını farz edelim. O sırada yanı başında bulunan hava molekülü de 300Hz ile titreşir ve o da yanındakini 300Hz ile titreştirir derken biraz önce anlattığımız olaylar gerçekleşir. Peki bir şansımız olsa da çıkan bu ses dalgasının fotoğrafını çeksek, nasıl bir görüntüyle karşılaşırız? Aşağıda bir trompetten çıkan bir notanın ya da ses dalgasının resmi var! Dalgalanan grafikleri andırıyor mu?



Öyleyse son bir teorem yazdıktan sonra iki

dilin birbirine nasıl çevrildiğini anlayabiliriz

Joseph Fourier'in 19. Yüzyılda söylediği şuydu: Neredeyse her periyodik fonksiyon sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden sonsuz serilerle açılabilir. Daha somut olarak; müzik aleti ve insandan çıkan bütün müzikal sesler (periyodik oldukları için) matematiksel ifadelerle dönüştürülebilir ki bunlar da sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıdır.

Öyleyse çıkaracağınız bir do sesinin aşağıdaki türden bir ifadeye denk olması mümkün:

$$y(t) = 1/2a_0 + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \dots + (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

ya da

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

İşte her hangi bir periyodik fonksiyona uyarlamak için bu denklemlerde verilen ve Fourier katsayıları olarak bilinen  $a_n$  ve  $b_n$  değerlerini bulmaya Fourier Analiz diyoruz. Fourier Analiz müzikte bir sesin temel bileşeniyle harmoniklerine ayrılmasında kullanıldığı için Harmonik Analiz olarak da anılır. Yukarıdaki sonsuz seriye de Fourier Serisi deniyor. Artık her müziğin matematiğe dönüştürülebileceğini biliyoruz. Peki ya geri dönüş?

## Geri Dönüşüm

Şimdiye kadar hep müziğin matematiğe dönüşümünden bahsettik. Peki geri dönüşüm nasıl olacak. Aslında bu işi yapan aletlerden bahsederek durumu oldukça somutlaştırmış oluruz. Doktorun hastasına, onun kalp atışlarını izlemek için taktığı EKG cihazının monitöre yansıyan görüntüsü en azından filmlerden izleyeninize varsa bilir. Hani hastayı kaybedince kalp durduğu ve hiç ses gelmediği için ekranda düz bir çizgi geçer. İşte o zaman yukarıdaki tüm Fourier katsayıları sıfır olur.

Örneğin  $\sin(x)$  grafiğini çalma şansımız olsa onun frekansında ve dalga boyundaki bir ses dalgası nasıl bir ses çıkarır. Gitarın saniyedeki titreşim sayısını ayarlayacak şekilde dokunabilseydik bunu yapabiliriz. Ama 1 saniyede ne kadar titreştiğini bile sayamayan beyinlerimiz bunu da başaramaz. Ama başaran aletleri yani bilgisayarları üretmekten geri kalmazlar! Size bu konuda yardımcı olması için ancak internet adresi verebilirim. Böylece  $\sin(x)$  ya da  $4\sin 2(x)$  grafiğinin sesini (program indirmeden) dinleyebilirsiniz:

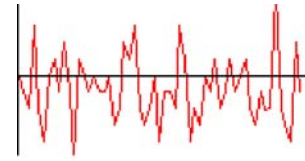
<http://library.thinkquest.org/19537/java/Wave.html>

## Do,Re,...,La,Si

Hazır bu kadar bilgiyi edinmişken sıcağı sıcağına notalardan bahsetmeden bu konuyu kapatmak olmaz. Çünkü müzik ile her hangi bir sesin nasıl ayırt edildiğini anlamamız için nota bilgisine de ihtiyacımız var. Kulaklarımız bu ikisini kolayca ayırt ediyor olabilir, peki ya matematiksel ifadelerle karşı karşıya isek işin içinden nasıl çıkarız? Notalar frekansları birbirlerine oranlanınca rasyonel sayı veren ses dalgalarından oluşur. Bugün kullandığımız 7 notalı sisteme baktarsak do sesini veren frekansın  $9/8$ 'i rey'i ya da  $3/2$  sol sesini vermektedir. Do sesinin frekansı 264Hz olarak ölçüldüğüne göre RE 297 sol de 396Hz olarak basitçe hesaplanabilir.

## Hangi do?

Bir piyano klavyesine baktığımızda bir sürü do görebiliriz hepsinin sesi de farklı ama aynı. Bu ne demek açıklayamam ama birisinin ince diğerinin kalın do olduğunu kulaklarımız zaten anlıyor. Biz aralarındaki matematiksel ilişkiyi inceliyoruz. Kalın do 264Hz iken ince do 528 Hz olarak ölçülür. Yani  $528:264=2$ . İşte iki sesin frekans oranı tam sayı ise biri diğerinden oktav farkı ile kalın oluyor. Bu örnekte aralarında 1 oktav var, Oran 3 olsaydı aralarında 2 oktav var diyecektik.



gürültünün resmi

Sonuç olarak müzik, frekans oranları rasyonel olan notaların bir karışımıdır. Gürültü de çıkan sesler de ise frekans oranlarında pek bir matematiksel düzen bulmak mümkün değildir. Kiminin bayıllık dinlediği müzik kimine gürültü olarak gelebilir. Evdekiler ben müzik dinlerken " şu gürültüyü kapat da kafamız rahat etsin" dediklerinde onlara matematiksel oranlardan bahsetmeye başlıyorum. İşte o zaman müziği dinlemeyi tercih ediyorlar. Hayır oranları sevimli bulduklarından değil, aksine matematik dinlemektense gürültüyü dinlemeyi tercih ettiklerinden. İşte böyle zamanlarda matematiğin ürkütücü(!) görünmesinden hoşlanıyorum. Tavsiye ederim!

Nilüfer Karadağ  
karadagniluf@yahoo.com