



M A T E M A T İ K K U L E S İ

E n g i n T o k t a ş
matematik_kulesi@yahoo.com

İkizkenar Yamuk :



Şekildeki gibi bir ikizkenar yamuğumuz olsun. Yamuktaki kırmızı alanın, mavi alanlar toplamına eşit olduğunu kanıtlayabilir misiniz?

Ne Kadar Uzak? :

Elinde 1 metre uzunluğunda teleskoba benzer kartondan bir külah bulunan meraklı bir çocuk kendisinden belli bir uzaklıktaki okçuların kullandığı hedef tahtasına bakıyor. Ne şanstır ki bulunduğu konumdan 1'den 12'ye kadar numaralandırılmış içiçe tüm çemberleri külahtaki görüntüye tam sığacak biçimde görebiliyor. Hedef tahtasına 3 metre yaklaşıktan sonra tekrar baktığında en dışta ancak 8 numaralı çemberi görebiliyor. Buna göre çocuk ilk başta hedef tahtasına kaç metre uzaklıktadır?

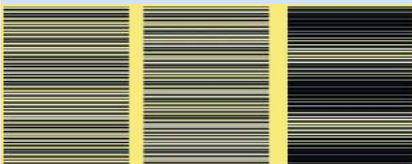
Ali Kılıç / Trabzon

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

MOIRE MOTİFLERİ - 2

Geçen ayki yazımız, bizlere geometrik bir görsel şölen sunan "moire motifleri" ile ancak tanışmamıza yetebilmişti. Bu ayki yazıda ise bu şaşırtıcı motiflerin nasıl oluştuğunu matematiksel olarak açıklayacağız.

Dilerseniz işe en kolay moire motiflerinden başlayalım. Elimizde paralel çizgilerle doldurulmuş şekil-1'deki gibi iki asetat olsun. Her bir asetattaki siyah çizgilerin kalınlığı ile beyaz çizgilerin kalınlığı eşit. Bir siyah ve bir beyaz çizgi tüm resim boyunca kendilerini tekrarladıkları için iki çizgiyi 1 periyot, toplam kalınlıklarını da dalgaboyu olarak düşünebiliriz. Şekil-1'de dalgaboyları a_1 ve a_2 olan ($a_1 < a_2$) iki paralel doğru şablonu üstüste çakıştırılmış ve en sağdaki 3. şekil elde edilmiştir. Bu durumda asetatlardan birini biraz kaydırarak olursanız oluşan motifin sizden farklı hareket ettiğini görürsünüz. Ve işte huzurlarınızda moire motifli! Bu olayın sebebini elbette ki matematiksel olarak açıklayabiliriz. Aşağıdaki testere dişi grafiğinin şablonlarımızın bir kesiti olduğunu varsayın. Grafiğin tepe noktaları siyah, çukurlar ise beyaz alanları temsil ediyor. Görüldüğü gibi ilk başta şa-



Şekil-1: %5'lik frekans farkıyla iki şablonun oluşturduğu moire motifi

(Bu soruyu Matematik Kulesi'ne gönderen okuyucumuz, TÜBİTAK Yayınları'nın "Pi Coşkusu (David Blatter)" adlı kitabını kazadı.)

En Büyük Ortak Bölen :

Her zaman karşımıza çıkan ve o meşur EBOB ya da OBEB kısaltmasına sahip en büyük ortak bölen ile ilgili biraz farklı bir soru soralım dedik. a ve b harfleri, iki farklı pozitif tamsayıyı temsil ediyor olsun.

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = K$$

eşitliğinde K sayısının da a ve b gibi bir tamsayı olduğunu biliyoruz. Bu durumda a ve b 'nin en

büyük ortak böleninin $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ değerini aşamayacağını gösterebilir misiniz?

Akıldan Trigonometri Hesabı :

Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan, $(0, \pi/2)$ aralığında a, b, c olmak üzere üç tane sayımız var.

$$\cos a = a,$$

$$\sin(\cos b) = b,$$

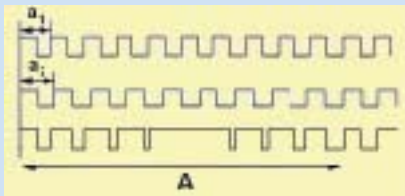
$$\cos(\sin c) = c.$$

Hiç hesap makinesi kullanmadan ve hesap yapmadan a, b, c sayılarını artan şekilde sıralayabilir misiniz? (Burada trigonometrik fonksiyonların radyan cinsinden hesaplandığına dikkat ediniz. Örneğin radyan cinsinden $\sin(\pi/2) = 1$ 'dir.)

yaş alanlar üst üste çakıştığı için beyaz alanlar rahat ayırt edilebiliyor. Ancak dalga boylarının farklılığından ötürü siyah alanlar gittikçe ayrılıyor ve beyaz alanları kapatıyor. Daha sonra tekrar örtüşmeye başlıyor ve böylece yeni motif kendi A dalga boyunu yaratıyor. Sizce A ile a_1 ve a_2 arasında bir bağıntı var mı? Matematiksel içgüdümüz sanki evet diyor. Moire motifinin bir periyodunda dalga boyu büyük olan şablonumuz n adım atmışsa küçük olan $n+1$ adım atmıştır. Bu sayede küçük dalga boylu şablon 1 tur bindirmiş olur.

$$A = n \cdot a_2 = (n+1) \cdot a_1$$

Burada $1/a_2 = n/A$ 'ya ve $1/a_1 = (n+1)/A$ 'ya eşit olur. O halde $1/a_1 - 1/a_2 = 1/A$ 'dır. En sonunda frekansın dalga boyunun çarpıma göre tersi olduğunu hesaba katarak $F = f_1 - f_2$ olan sevimli formülümüzü elde etmiş oluruz. Bu formül sayesinde artık sizden farklı hareket eden moire motifinin hızını bulabilirsiniz.



Şekil-2 : Şablon kesiti

Etrafımızı saran birbirinden ilginç moire motiflerinin matematiksel açıklamasını yapmak matematik severler için son derece zevkli bir egzersiz olabilir. Bu yazıdan sonra artık her şey sizin yaratıcılığınıza kalıyor. Karşınıza çıkacak ilk moire motifinin esrarını matematik sayesinde çözmeye ne dersiniz?

Geçen Ayın Çözümleri

Matematiğin Birleştirici Gücü :

Paralel doğru parçalarını kullanarak ABC üçgeni ile DEO üçgeninin iç açılarının eşit olduğunu söyleyebiliriz. Böylece iki üçgen benzer üçgen olur. Aynı sebepten ötürü ABC üçgeni ile OIH ve OFG üçgenleri de benzer üçgenlerdir. Benzerlik oranının iç teğet çemberleri için de geçerli olduğunu hatırlayalım. Bu durumda $DE/AB = r_1/r$, $OI/AB = AD/AB = r_2/r$ ve $OF/AB = EB/AB = r_3/r$ eşitliklerini yazabiliriz. Üç eşitliği taraf tarafa topladığımızda:

$$\frac{AD+DE+EB}{AB} = \frac{r_1+r_2+r_3}{r} = 1$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $r_1 + r_2 + r_3 = r$ eşitliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluruz.

İkiz Asal Sayılar :

Soruda isteneni aksini varsayarak ispatlayacağız. Farzedelim ki $p-2$, p , $p+2$ sayılarının üçü de asal sayı olsun. $p-2$ sayısının 3'den büyük olduğunu biliyoruz. Bu durumda $p-2 = 3a+1$ veya $p-2 = 3b+2$ olmalı. $p-2 = 3a+1$ ise $p=3a+3$ olur ve sayı 3'e bölünür. Çelişkiyi yakalamış olduk. Eğer $p-2 = 3b+2$ ise $p+2 = 3b+6$ olur ve $p+2$ sayısı da 3'e bölünür. Bu da ikinci çelişki. Sonuç olarak 5 asal sayısından başka iki ikizi olan başka asal sayı yoktur.

Son Duraklar :

Örnek olarak $a > b > c$ olması koşuluyla a, b, c rakamlarından oluşan bir sayı alalım. Bu rakamlarla oluşturabileceğimiz en büyük sayı abc , en küçük sayı da cba olur. O halde yeni sayımız $abc - cba = xyz$ 'dir. Burada 2. basamağa dikkat edelim. $c < a$ olduğu için çıkarma işleminde 2. basamak daima 9 olacaktır yani $y=9$ 'dur. Ayrıca birler basamağı için $10+c-a = z$ ve yüzler basamağı için $a-1-c = x$ eşitlikleri yazılabilir. İki eşitliği taraf tarafa topladığımızda $x+z = 9$ olduğunu görürüz. Bu kurala uyan ve tanımlanan işlem sonucunda kendisini veren tek bir sayı var: 495! İşte son durağımıza geldik.

Olasılık ve Geometri :

Şekilde koyu gri ile gösterilen bölgede $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ dik üçgenlerini oluşturalım. Oluşturduğumuz üçgenlerin hipotenüsü üzerinden 1 nokta alırsak bu noktanın en yakın köşeye uzaklığının yarısı en yakın kenara uzaklığına eşit olur. Bizden istenen ise bu oranın eşit değil küçük olması. O halde noktamız beyaz alandan seçilmeli. Olasılığı bulabilmek için geriye sadece beyaz alan ile karenin alanını oranlamak kalıyor. Karenin bir kenarı $2a$ ise beyaz alan, tüm alandan 8 diküçgenin alanını çıkararak $(2a)^2 - 8 \cdot (1/2) \cdot a \cdot (a/\sqrt{3}) = 1,69 \cdot a^2$ olarak bulunur. O halde istenen olasılık $1,69 \cdot a^2 / 4 \cdot a^2 = 0,42$ 'dir.

