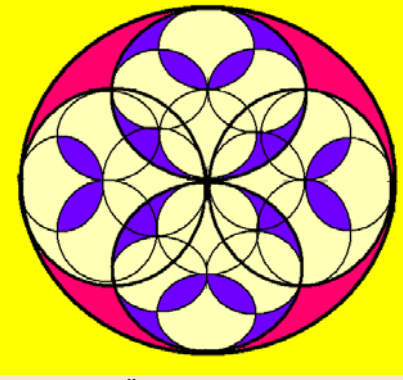




Alanların Eşitliği:

İşte matematiğin estetik güzelliğini kanıtlayan bir soru daha. Büyüleyici bir güzelliği olan bu geometrik şekildeki kırmızı alanlar ile mor alanların birbirine eşit olduğunu kanıtlayabilir misiniz?



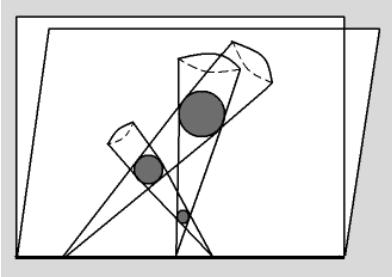
Kareden Üçgen:

Kenar uzunluğu a olan elinizde bir kare olsun. Bu kareyi 2 doğru ile öyle üç parçaya bölünüz ki parçaları birleştirdiğinizde geniş açılı bir üçgen oluşsun. (Soru biraz tangramı anımsatsa da aslında geometrinin güzel bir uygulaması)

Geçen Ayın Çözümleri

Teğetlerin Buluşma Noktası:

Matematiksel ispatını siz okuyucularımıza bırakarak daha fazla ilginizi çekebilecek bir ispatı veriyoruz.



Şekildeki gibi bir cam masa üzerine farklı boyutlarda 3 küre koyalım ve bunları ikişer ikişer saran 3 koni hayal edelim. Şimdi de koniler üzerine ikinci bir cam düzlem koyalım öyle ki konilerin bize göre üst noktaları cama değsin. İki düzlemin kesiti bir doğru olduğundan ve konilerin tepe noktası her iki düzlemde de bulunduğundan bu üç nokta aynı doğru üzerinde bulunacaktır.

Lewis Carroll Problemi:

Genel bir yanlışlık olarak atılan topun çekildiği sanılır ve kalan topun ya siyah ya da beyaz olacağı düşünülerek cevap $1/2$ olarak verilir. Oysa ki 3 durum söz konusudur. 1. olasılık: Sonradan atılan top çekilmiştir. İçinde kalan top siyahtır. 2. olasılık: Sonradan atılan top çekilmiştir. İçinde kalan top beyazdır. 3. olasılık:

Kumbaralarla Oyun:

Elimizde aynı cins demir paralarla dolu 3 tane kumbara var. Birinci kumbarada 1997 tane, ikinci kumbarada 997 tane, üçüncüsünde ise 97 tane para bulunuyor. Sadece şu işlemleri yapmanıza izin veriliyor:

1) Kumbaraların her birinden eşit sayıda (bu sayı her hamlede farklı olabilir) para çıkarabilirsiniz.

2) Çift sayıda para bulunan kumbaradaki paranın tam yarısını diğer iki kumbaradan birine aktarabilirsiniz.

Bu şartlar doğrultusunda kumbaraların ikisinde hiç para kalmamasını sağlayabilir misiniz? Peki üç kumbarada da hiç para kalmamasını sağlayabilir misiniz?

Ufuk Çizgisi:

“Matematiğin Şaşırtan Yüzü” bölümündeki konuya uygun bir soru var huzurlarınızda. Diyelim ki okyanusun engin mavi sularında botunuzda bir başınızdasınız. Gözleriniz suyun seviyesinden 2 metre yukarıda olsun. Dünyanın yarıçapını yaklaşık 6600 km olarak alırsak ufuk çizgisinin sizden ne kadar uzakta oluştuğunu bulabilir misiniz?

Torbadaki ilk top çekilmiştir. Bu durumda torbada kalan top kesin beyazdır. Açıkladığımız üç olasılık doğrultusunda torbada beyaz top kalma olasılığı $2/3$ olur.

Uğurlu Evler:

Herhangi bir tane uğurlu evin kapı numarasını alalım ve bu sayıya X diyelim. Eğer X sayısı uğurlu sayılan numaralardansa $X' = 999999 - X$ sayısı da bir uğurlu sayı olmak zorundadır. Bunun ispatını bulabilirsiniz ya da birkaç denemeye kolayca görebilirsiniz. Şimdi iki sayıyı toplayalım:

$$X + X' = 999999 = 1001.999 = 7.11.13.999$$

Görüldüğü gibi iki sayının toplamı 13 ile tam bölünüyor. O halde tüm uğurlu evlerin kapı numaraları toplamı da 13 ile bölünür.

Kendi Formülümüzü

Kendimiz Yapalım :

Formülümüzü oluşturabilmek için üçgen sayılara ihtiyacımız olacak. Üçgen sayılar 1'den başlayan ardışık doğal sayılar toplamıdır. Örneğin $a = 1 + 2 + 3 = 6$ veya $b = 1 + 2 = 3$ birer üçgen sayıdır. Eğer $X^2 + Y^2 = Z^2$ denkleminin sağlanması ve X 'in bir küp olmasını istiyorsak bu sayıları şu şekilde elde edeceğiz: Öncelikle a ve b olmak üzere ($a > b$) herhangi iki üçgen sayı alacağız ve aşağıdaki işlemlerle X , Y ve Z 'yi bulacağız. $X = a^2 - b^2$, $Y = 2ab$, $Z = a^2 + b^2$. İstenilen $X^2 + Y^2 = Z^2$ eşitliğini $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$ ile ispatlamak kolay. Küp özelliğini de $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ özelliğinden faydalanarak ispatlayabiliriz.

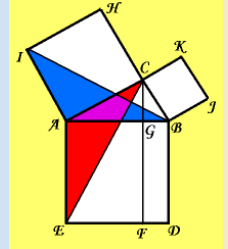
Matematiğin Şaşırtan Yüzü

PİSAGOR TEOREMİ

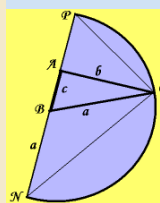
Belki de ilk öğrendiğiniz formüldü Pisagor Teoremi. Hatırlayın, öğretmeniniz ya bir eşeğin kulaklarına benzeterek anlatmıştı ya da tahtaya çizdiği küçük bir dik üçgenle. $a^2 + b^2 = c^2$ gibi çok basit yapısına rağmen geometride o kadar önemli bir eşitliktir ki hepimiz Pisagor'un yaklaşık 2500 yıllık bu bilgisini öğrenme ihtiyacı duyduk ve öyle görünüyor ki torunlarımız, onların torunları ve onların torunları da bu şihirli formüle gelecekte yine ihtiyaç duyacaklar.

Tahminen M.Ö. 500'lü yıllarda bulunan teoreme ilgi günümüze kadar hiç eksilmedi. Şu ana kadar Pisagor teoreminin tescillenmiş 400'e yakın ispatı bulunuyor. “American Mathematical Monthly” periyodığında toplanan bu ispatların sahiplerinden en genci 16 yaşında bir genç kız, en yaşlısı da 88 yaşında emekli bir profesör. Şimdi gelin hep birlikte yerimiz elverdiğince bu ispatlardan iki tanesini inceleyelim.

İlk ispatımız Öklit'e (Euclid) ait. Öklit'in ispatı benzer ispatlara oranla biraz daha karışık olsa da içerdiği zeka parıltıları nedeniyle incelenmeye değer. C açısı dik olmak üzere ACB dik üçgenini alalım ve her kenarından şekildeki gibi kareler çizelim. Dikkat ederseniz kenar açısı kenar teoremine göre ACE üçgeni ile AIB üçgeni eş üçgenler oluyor. Çünkü $AC = AI$, $AE = AB$ ve IAB açısı CAE



açısı $= 90 + CAB$ açısı. Şimdi ilk olarak IAB üçgenini inceleyelim. Yüksekliği ve taban kenarı $ACHI$ karesinin bir kenarına eşit olan IAB üçgeninin alanı $ACHI$ karesinin yarısına eşit olur. Bu bilgiyi elde ettikten sonra gelelim CAE üçgenine. Üçgenin taban kenarını AE olarak alırsak Yüksekliği AG 'ye eşit olur. Bu durumda CAE üçgeninin alanı $AGFE$ dörtgeninin alanının yarısına eşit olur. IAB ile CAE 'nin eşit alana sahip olduğunu bildiğimize göre üçgenlerden alan olarak iki kat daha büyük $ACHI$ ile $EFCA$ 'nın da eşit alana sahip olduğunu söyleyebiliriz. Aynı yöntem ile $BJKC$ karesi ile $BGFD$ dörtgeninin alanlarının eşit olduğunu bulabiliriz. Bunun ispatını okuyucularımıza bırakıyoruz. Sonuç olarak $alan(ACHI) + alan(BJKC) = alan(AEDB)$ olarak bulduk. Bu da bize $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini verir.



Bir diğer güzel ispat da Gottfried Leibniz'e ait. Şekildeki yarım çember içine B köşesi çemberin merkezine gelecek şekilde A köşesi dik açı olan ABC dik üçgeni çiziliyor. Bu durumda PAC ile CAN üçgenleri benzer üçgenler olur. O halde $PA/AC = AC/AN$ eşitliğini yazabiliriz. Bu da $(c-a).(c+a) = b^2$ eşitliğini verir. Küçük bir düzenlemeyle yine $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini elde ederiz.