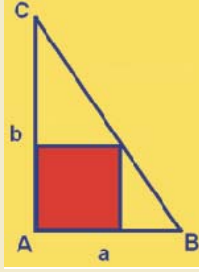




Tozlu Yapraklardan Bir Soru

Her ne kadar matematiksel sorular ve cevaplar gün geçtikçe daha çok karmaşılaşsa da eski zamanların sorularına basit ama dahice yaklaşımları bizi bugün bile etkilemeye devam ediyor. Sorumuz 263 yılın da Liu Hui tarafından



“Hai Tao Suan-Ching” (Denizde Klasik Aritmetik Adası) adlı kitapta sorulmuştur. Dik kenarları a ve b olan bir dik üçgenin dik açılı köşesinden hipotenüse düşmek üzere çizilen karenin alanı nedir? Cevabı Liu Hui gibi geometrik yoldan düşünmek, soruyu daha çok sevmenizi sağlayabilir.

Yeni Yıla Merhaba

2003 yılını bitirip 2004 yılına girmemiz nedeniyle yeni yılınızı güzel bir soruyla kutlamak is-

tedik. Yeni yılın verdiği enerjiyi kullanarak (20032004!)² sayısının mı yoksa (20032004)²⁰⁰³²⁰⁰⁴ sayısının mı daha büyük olduğunu bulabilir misiniz?

Gizli Sayılar

Elimizde n adet, sıfırdan farklı sayıların oluşturduğu bir grup olsun. Sayılarımızın sizin de hoşunuza gidecek ilginç bir özelliği var: sayılardan her biri, gruptaki diğer sayıların toplamının yarısına eşit. Bu durumda gruptaki sayıların kaç tane ve hangileri olduğunu bulabilir misiniz? (Eğer a_1 'den a_n 'e kadar olan sayılar için denklemler kurup çözerseniz sorunun çözümünü daha kolay görebilirsiniz.)

Hangisi Fazla?

Elimizde 1'den 100'e kadar olan sayıların faktoriyelerinin çarpımı var:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \dots 99! \cdot 100!$$

Bu yüz faktoriyeden sizce hangisini atalım ki geride kalan 99 faktoriyelin çarpımı bir sayının karesi olsun?

Geçen Ayın Çözümleri

En Küçük Değer :

1998 tane ardışık sayıdan oluşan bir sayı dizimiz olduğunu düşünelim. Bu dizideki en küçük iki sayıyı toplamı dizideki herhangi bir sayıya eşit değilse, soruda istenen sağlanmış olur. Bu kurala uyan en küçük dizi : 1997, 1998, 1999, , 3994'dür. Acaba aradığımız dizi bu mu? Şimdi, varsayalım ki en büyük elemanı $A < 3994$ olan ve istenilen kurala uyan başka bir dizi olsun. A sayısına kadar olan tüm sayılar (1, A-1), (2, A-2),... şeklinde ve toplamı A'yı verecek biçimde ikişerli gruplayabiliriz. Bu grupların sayısı en fazla $3994/2 - 1 = 1996$ tanedir. Oysa bizim A sayısına kadar 1997 tane sayı seçmemiz gerekiyor. Bu durumda en az 2 sayı aynı grupta olur ve toplamı A'ya eşit olur. Böylece biz de çelişkiyi yakalamış oluruz.

Paralelkenarda Bilinmeyenler :

AD doğru parçasının üstüne aynı paralelkenardan bir tane daha koyalım ve köşelerini şekildedeki gibi adlandıralım. Bu durumda $\angle M'AD = 20^\circ$ ve $\angle M'DA = 50^\circ$ olur. Dikkat ederseniz $\angle M'AM + \angle MDM' = 180^\circ$ 'dir. Bir dörtgenin karşılıklı açıları toplamı 180° olursa bu dörtgenin dört köşesinden de geçecek bir çember çizilebilir. Çemberde aynı yayı gören $\angle MAD$ ve $\angle MM'D$ açıları birbirine eşittir ve değerleri 40° dir. $M'KD$ üçgenini düşündüğümüzde $M'KD$ açısı 90° ye eşit olur. Çizdiğimiz $M'M$ doğru parçası AB kenarına paralel olduğuna göre $M'KD$ açısını kullanarak paralelkenarın tüm iç açılarının 90° olduğunu söyleyebiliriz. Yani şeklimiz aslında bir dikdörtgendir.

Fibonacci'ye veda :

Ardışık iki Fibonacci sayılarının değerlerini incelediğimizde en küçük değerin $f_3/f_2 = 3/2 = 1,5$ ve

en büyük değerin $f_4/f_3 = 5/3 = 1,66666... < 1,7$ olduğunu görürüz. Diğer tüm oranlar 1,5 ve 1,7 arasıdır ve meşhur “altın oran” sayısına yani $(1 + \sqrt{5})/2$ 'ye yakınsar. Şimdi f_k , m basamaklı ($m \geq 2$) en küçük Fibonacci sayısı olsun. Öyleyse $f_k \geq 10^{m-1}$ dir ve ilk baştaki bilgiye göre $f_{k+1} \geq 1,5 f_k$ olur.

Diğer terimler:

$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \geq (1,5 + 1) f_k$$

$$f_{k+3} \geq (1,5 + 2,5) f_k = 4 f_k$$

$$f_{k+4} \geq (4 + 2,5) f_k = 6,5 f_k \text{ olur.}$$

Ancak f_{k+5} i hesapladığımızda $f_{k+5} \geq 10,5 f_k > 10^m$ çıkar ve f_{k+5} en az $m+1$ basamaklı olur. Sonuç olarak 5'ten fazla m basamaklı Fibonacci sayısı yoktur.

Aynı şekilde $f_{k-1} < 10^{m-1}$ ve $f_k < 1,7 f_{k-1}$ özelliklerini kullanarak m basamaklı Fibonacci sayılarını hesaplırsak $f_{k+3} < 7,1 f_{k-1} < 10^m$ olduğunu buluruz

ki bu da 4'ten az m basamaklı Fibonacci sayısının olmayacağını gösterir.

Üç aceleci arkadaş :

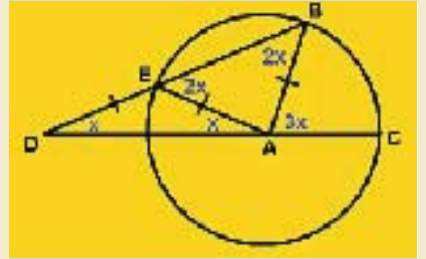
İki bisikletle ve yaya olarak ayrı ayrı 30'ar km gidilebileceğine göre yolculuğun toplam süresi $1 + 1,5 + 5 = 7,5$ saat olur. Bu durumda varış süresi en az $7,5/3 = 2,5$ saattir. En az sürede varabilmek için üç arkadaşın B şehrine aynı anda varmaları gerekiyor. Bunu ispatlarsak soruyu da çözmüş oluruz. Birinci kişinin ilk x km'yi yürüyerek, geri kalan $(30-x)$ km'yi yarış bisikletiyle, ikinci kişinin ilk y km'yi yarış bisikletiyle, geri kalan $(30-y)$ km'yi yürüyerek, üçüncü kişinin ilk x km'yi yarış bisikletiyle, daha sonraki $(y-x)$ km'yi yürüyerek ve geri kalan $(30-y)$ km'yi de dağ bisikletiyle gittiğini düşünelim. Üçünün de 2,5 saatte vardığını kabul ettiğimizde, denklemlerinin çözümü sonunda $x = 45/4$ km $y = 150/7$ km çıkar. Bulduğumuz x ve y değerlerine göre denerseniz üç arkadaşın da aynı anda B şehrine vardığını ve yolculuğun 2,5 saat sürdüğünü göreceksiniz.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Açıyı Üçe Bölmek

“Sadece bir pergel ve işaretlenmemiş bir cetvel (düz bir çubuk) yardımıyla verilen bir açıyı üçe bölebilir misiniz?”

Sadeliğinde matematiğin o muhteşem büyü-sünü gizleyen bu soru, yaklaşık 2000 yıl boyunca matematikçilerin bir türlü çözemediği esrarını korudu. Zaman içinde çözüm için birçok yöntem önerildiyse de hiçbirisi çürütülmekten kurtulamadı. Bu yöntemlerin en ilginçlerinden biri Arşimet'e aittir. Örneğin BAC açısını üçe bölmek istiyoruz. A noktasını merkez alan bir çember çizelim. Daha sonra şekildedeki gibi öyle bir BED doğru parçası çizelim ki D noktası AC'nin uzantısında olsun ve DE'nin uzunluğu çemberin yarıçapına eşit olsun. Böylece şekilde gösterilen açıları elde etmiş oluruz. Görüldüğü gibi AED açısı bölmek istediğimiz açının üçte biridir. Buraya kadar her şey çok güzel gözükse de aslında ciddi bir so-



runumuz var. Sadece pergel ve işaretlenmemiş cetvelle bu şekli çizmek imkansızdır. İki şartı aynı anda sağlamak istiyoruz: 1) BED doğru parçasında D noktası AC doğru uzantısında olsun 2) ED'nin uzunluğu çemberin yarıçapına eşit olsun. Baştan belirttiğimiz, cetvel üzerine işaret koyma yasağına uyararak tam tamına bu çizimi ancak sonsuz deneme sonunda elde edebiliriz. Her seferinde daha iyi bir sonuç elde etmek de kesin sonuçla hiçbir zaman ulaşamayız. Yaşadığımız aynı sorunla, verilen bir çemberin alanına eşit alanlı bir kare çizmek istediğimizde de karşılaşırız. Neyse ki ünlü matematikçi Galois bu noktada imdada yetişerek verilen şartlarda böyle bir çizimin yapılamayacağını ispatladı ve matematikçileri yıllarca uğraştıran büyük bir dersten kurtardı.

Belki bu soruda yetersiz kaldılar ama cetvel ve pergel birlikteliğinin inanılmaz başarıları, matematikten zevk alan herkesi büyülemeye tabi ki devam edecek.

Matematik Yayınları...

Dost Kitabevi tarafından yayınlanan Alfred Renyi'nin “Matematik Üzerine Diyaloglar” kitabı matematiği felsefik olarak sorgulaması nedeniyle dikkat çekiyor. Yazar aslında birçoğumuzun aklını kuralayan matematiğin nasıl bir bilim olduğunu sorusunu Sokrates, Galilei gibi ünlülerin ağızlarından sizlerin de katılacağı bir tartışmaya açıyor.

