

MATEMATİKTE SEÇİM KURAMI

Yerel seçimler geride kaldı ama, yankıları hâlâ sürüyor. Ülkemizde kullanılan seçim sistemi gereği en çok oyu alan adaylar iş başına geçti bile. Peki uygulanan bu seçim sistemi gerçekten adaletli mi diye sorsam, “Bunun üzerine düşünmeye, konuşmaya pek gerek yok! Oylama yaparız birinci gelen seçimi kazanır, hak hukuk yerini bulur” diyeceksiniz büyük olasılıkla. Önünüzde iki adayınız varsa evet haklısınız. Oylama sonucuna göre en çok oyu alan kazanmalı. Aksi takdirde bu adil bir seçim olmaz. Peki ya 3 veya daha fazla adayınız varsa ne olacak. Yine en çok oyu alan aday kazanırsa mutlaka adil bir seçim olmuştur diyebilir miyiz? Yani 100 kişinin katıldığı bir seçimde Cezmi 40, Hurşit 35, Mahmut 25 oy alsa Cezmi hakıyla birinci olmuş gibi gözüküyor. Hayatı her yönüyle değerlendiren, bardağın hem dolu hem boş tarafını gören matematikçilerden biri çıkıp “100 kişiden 60 kişinin istemediği bir aday birinci olmuş adalet bunun neresinde” derse biraz durup düşünmeye başlarsınız herhalde. Seçim, öyle görüldüğü kadar basit bir sistem değil. Fakat şunda anlaşıyoruz ki, uygulanması basit, tutarlı ve en önemlisi de adaletli olması iyi bir seçimin en göze çarpan özellikleridir. O zaman haklı bir seçim nasıl olur? İşte böyle bir şey yok; çünkü 2’den fazla adayın bulunduğu hiçbir seçim için adil bir sistem yoktur. Üstelik bu öylesine yapılmış bir yorum değil, matematiksel iktisatçı Kenneth Arrow’un 1952 yılında ispatladığı ünlü bir teorem.

Teorem’e göre 3 veya daha fazla adayın bulunduğu bir seçimin adil bir şekilde sonuçlanabileceği hiçbir tutarlı metod yoktur.

Seçim Kuramı

Yavaş yavaş seçimin düşündüğümüz kadar basit olmayan bir işlem olduğuna kanaat getirmeye başladık. İşte bu noktada matematiğin sadece fizik, kimya, biyoloji gibi sayısal ağırlıklı bilimlerde değil, siyasal bilimlerde de uygulama alanlarının olduğuna tanık oluyoruz. “Seçim kuramı” olarak ortaya çıkan bu kuram, daha çok matematikçiler ve matematiksel iktisatçılar tarafından yürütülen ve hala hızla gelişmekte olan bir matematik teorisidir.

Adil Ne Demek?

Şimdi bu beklenmedik teoreme geri dönelim ve onu anlamaya çalışalım. Bu teoremin haklı olduğunu anlayabilmemiz için öncelikle “adil” gibi alabildiğine göreceli olan bir kelimenin nasıl tanımlandığını bilmek gerekiyor sanırım... Bunu yapmak çok da kolay

olmayacak. Çünkü bu kuramı çalışanlar haklı bir seçimin nasıl olabileceği adına pek çok öneride bulunmuşlar. Biz burada adillik kavramını teoremin yapısı içinde değerlendireceğiz.

Adillik kriterleri:

- Çoğunluk Kriteri,
- Condorset Kriteri (Önerenin soyadıyla anılıyor),
- Sonucun (diğer adaylardan) bağımsızlığı kriteri
- Monotonluk kriteri,.

Burada belirtilen kriterlerin hepsi aslında doğal olarak gerçekleşmesi gereken maddelermiş gibi görünse de, bazen şaşırtıcı bir şekilde sağlanmıyor. Şimdi bu kriterleri ve sağlanmadıkları seçim biçimlerini örnekleriyle inceleyelim.

Oy çoğunluğu: Bir seçimin en temel özelliği oy çoğunluğunu sağlayan adayın birinci olmasıdır. Yani ilk kriterimiz “seçimin tipi ne olursa olsun adil bir seçimde oy fazlasını alan aday birinci olur”.

Condorset Kriteri: Fransız matematikçi Marquis de Condorset’in soyadıyla anılan bu şarta göre, “bir aday diğer adaylarla ayrı ayrı ikili mücadelelerin hepsinde oy çoğunluğunu sağlıyorsa o aday kazanmalıdır”. Bu çoğu seçimde (özellikle büyük seçimlerde) sorgulanmayan bir noktadır. Çünkü oy verirken kimse Cezmi’yi tercih

eden kişiye kalan adaylardan Hurşit’i mi Mahmut’a tercih eder, yoksa tersini mi yapar diye sormaz. Peki, seçmenlere tercih sırası sorulduğu zaman ortaya nasıl bir tablo çıkıyor, bakalım:

Sınıf Başkanlığı seçimi için 4 öğrenci Fatih, Güney, Meltem ve Ayşegül adaylıklarını ilan ederler. 20 tane öğrencinin bulunduğu sınıfta klasik bir seçim yapılır.

Fatih	8
Güney	0
Ayşegül	9
Meltem	3

Tablodan da görüldüğü gibi Ayşegül kazanır. Fakat bizim meraklı adaylar seçmenlerden kimi kime tercih ettiklerini de belirtmelerini isterler. Sözelimi FAMG şeklindeki bir oy “Oyum Fatih’e. Ama Ayşegül’ü Meltem’e; Meltem’i de Güney’e tercih ederdim” anlamına geliyor. Sonuçlar analiz edildiğinde şu gerçeğe karşılaşıyor:

Fatih’i Ayşegül’e tercih eden:11

Fatih’i Güney’e tercih eden:11

Fatih’i Meltem’e tercih eden:17

Görünüşe bakılırsa ikili çekişmelerde hep oy çoğunluğunu sağlamasına karşın, birinci yine de Fatih olamadı. Bu da Condorset Kriterini ihlal etmiş bir seçim örneği, yani adil bir seçim değil.

Seçim Paradoksu

Böyle bir örneğe şahit olduktan sonra daha büyük problemlerle hatta matematiğin çıkmaz sokakları olan paradokslarla karşılaşmaya kendinizi hazırlayın. Çünkü, seçim kuramında önemli sonuçları ispatlamış olan matematikçi Donald Saari’ye göre, kimse bir seçimde sonucu sorgulamaya kalkmamalı. İçinden çıkamaz ve öyle bir senaryo yazılabilir ki, herkes A’yı B’ye tercih eder ama seçimi B kazanır.

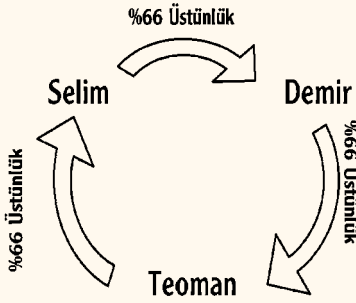
Bazen çok daha ilginç örnekler çıkabilir karşınıza. Öyle ki seçim sonucunu siz belirlersiniz. Diyelim ki, 30 seçmenin bulunduğu yönetim kurulu seçiminde adaylar Selim, Demir ve Teoman Beyler yukarıdaki gibi sıralama yapılarak seçi-



lecekler. Yapılan ilk seçim bir sonuca ulaşmıyor çünkü her aday tablodan da görüldüğü gibi eşit birincilik alıyor.

SDT	10
DTS	10
TSD	10

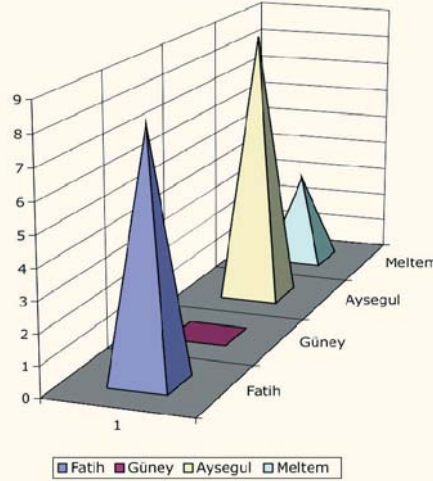
Önerilen çözüm şu; önce iki kişi arasında bir seçim yapılsın, kazanan aday diğeriyle yarışsın. Kim kazansın istersiniz? Teoman Bey mi? O zaman ilk seçimi Selim ve Demir Beyler arasında yapalım. Tablodan öyle görünüyor ki, SD:20 DS:10.Selim Bey kazandı. İkinci turda TS:20 ST:10 olduğundan Teoman Bey seçimi kazanacaktır. Eğer siz Demir Bey'in kazanmasını isterseniz. Önce diğer iki adayı sonra da kazananı – ki bu Teoman Bey olacak– Demir Beyle yarıştırsın. DT:20, TD:10 olduğundan Demir Bey kazanır. Selim Bey'in kazanacağı alternatifi de size bırakıyorum. Kısacası kimse fikrini değiştirmese bu seçimi sonlandıramayacağız. Çünkü burada başı sonuna çıkan bir çıkmaz sokak, diğer bir deyişle paradoks var.



Sonucun diğer adaylardan bağımsızlığı kriteri: Seçim yapıldı ve birinci olmayan herhangi bir aday sonuç ilan edilmeden çekildiğini duyurdu. Sizce bu durum birinciyi değiştirir mi? (seçim tekrarlanmayacak, sadece çekilen aday aradan silinecek). İlk bakışta pek mümkün görünmeyen ve dolayısıyla üzerinde durulmamacak bir noktaymış gibi görünen bu şartın ihlal olduğu seçim tipleri var.

1770 yılında JC Borda isimli Fransız matematikçi, Kraliyet Bilim Akademisi'nin uyguladığı seçim sisteminde yanlış kararlar alındığından endişe ederek bir akademiye bir öneride bulundu. Öneriye göre, seçmenler sözgelimi 3 adayın bulunduğu bir seçimde adayları tercihlerine göre sıralandracaklar. Birinciye 3, ikinciye 2, üçüncüye de her oyda 1 puan verilecek. En çok puanı alan aday kazanacak. (spor karşılaşmalarında da bu tarz sistemler yaygın olarak kullanılmakta) Şimdi bu metodun klasik seçimden farkını görelim: 3 adayımız (A,B,C) ve 3 seçmenimiz olsun. Oylar ABC,CBA,BAC şeklinde verilirse; klasik seçimde eşitlik olurken (herkes bir oy alır), Borda Sistemi'ne göre A:6 (1birincilik, 1ikincilik, 1üçüncülük), B:7 (1birincilik, 2ikincilik) C:5 (1birincilik, 2 üçüncülük) alır ve hiç de eşitlik falan olmaz. Aslında bu metodun klasik metottan neden daha iyi olduğu önericisi tarafından örnekleriyle gösterilmiş olsa da, sistem Napoleon Bonaparte tarafından 1800'lerde değiştirildi.

Şimdi kriterimize geri dönelim. Sizi ikna edebilmem için bu kriteri ihlal eden bir örnek



lazım. Gelin Borda'nın önerdiği metodun uygulandığı bir seçim sistemine bakalım:

Bir güzellik yarışmasında 3 güzel; Özge, Gamze ve Şule, 53 kişilik jüri tarafından az önce bahsettiğim puanlama tipliyle oylanırlar. Sonuçlar ilan edilir;

27 üye Gamze'yi birinci, Özge'yi ikinci, Şule'yi üçüncü
24 üye Şule'yi birinci, Özge'yi ikinci, Gamze'yi üçüncü
2 üye Özge'yi birinci, Şule'yi ikinci, Gamze'yi üçüncü

seçer. birinciler 3, ikinciler 2, üçüncüler de 1 puan alır ve son puanlar şöyle olur:

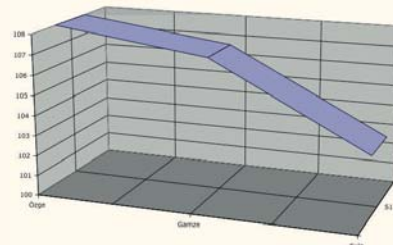
Özge	$2 \cdot 3 + 51 \cdot 2 = 108$
Gamze	$27 \cdot 3 + 26 \cdot 1 = 107$
Şule	$24 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 27 \cdot 1 = 103$

Şimdilik Özge seçimi kazanacak gibi görünmektedir. Fakat bir son dakika haberi gelir. Kaybedeceğini anlayan Şule, bunu kendine yediremez ve henüz sonuçlar ilan edilmemişken yarışmadan çekildiğini duyurur. Sonuçta bir değişiklik olmaz mı diyorsunuz hele ki sonuncu olan bir aday, seçimden çekilse ne çekilmese ne... Yine de bir kontrol edelim. İki adayımız olduğu için birinciye 2, ikinciye de 1 puan vereceğiz.

27 üye Gamze'yi birinci, Özge'yi ikinci, ~~Şule'yi üçüncü~~
24 üye ~~Şule'yi birinci~~, Özge'yi birinci, Gamze'yi ikinci
2 üye Özge'yi birinci, ~~Şule'yi ikinci~~, Gamze'yi ikinci seçer.

Özge	$26 \cdot 2 + 27 \cdot 1 = 79$
Gamze	$27 \cdot 2 + 26 \cdot 1 = 80$

Sıra birinciyi ilan etmeye geldiğinde, söylenen isim Özge değil de Gamze olur. Çünkü, birinci olmayan bir adayın çekilmesi herşeyi altüst etti. Bu seçim de kriterimizin ihlal edilebileceğini bize gösterdi.



Monotonluk Kriteri: Bir seçim yapıldı ve sonuçlar ilan edildi, seçimi kazanan adayın aldığı oyları artırıcı şekilde seçim tekrarlanırsa kazanan yine aynı aday olmalı. Yine şaşırtıcı bir şart ile karşı karşıyayız. Seçimi tekrarlıyoruz, birinciyi daha çok oy veren oluyor(başka hiçbir değişiklik yok) ve kazananın yine aynı kişi olup olmayacağını sorguluyoruz. Bu kadarı da fazla diyorsanız, sıradaki örneği dikkatle takip edin: Üniversitenin Öğrenci Temsil Kurulu (ÖTK) Başkanlığı'na adaylığını koyan 3 öğrenci Seyhan, Tuğrul ve Emrah, 29 kişilik kurul üyeleri tarafından iki türlü açık bir seçimle oylanacaktır. İlk tur sonunda, Emrah 11, Tuğrul 8 ve Seyhan 10 oy alır.

Emrah ve Seyhan'ın çıkmaya hak kazandığı ikinci tur sonunda: Emrah 11'de kalır ve (Tuğrul'un da oylarını alan) Seyhan 18 oyla seçimi kazanır.

Sonuçlar resmen ilan edilmeden, başkan adaylarından daha ilk turda elenen Tuğrul seçime itiraz eder. İtiraz bir şekilde kabul edilir (senaryonun bu ayrıntısı bizi çok fazla ilgilendirmiyor!) ve seçim tekrarlanır. İlk turda seçimler 4 kişi haricinde aynı kalır. Bu 4 kişi de sürüye uymak adına tercihlerini biraz önceki birinci aday Seyhan yönünde değiştirirler.

Emrah 7 (4 oyunu Seyhan'a kaptırdı), Tuğrul yine 8 ve Seyhan 14 oy alır.

Şimdi arkanıza yaslanın ve ikinci turda olacakları görün. Bu tur Seyhan ve Tuğrul arasında yapılır. Sonuçlar şöyle:

Seyhan 14, (Emrah'ın oylarını da alan) Tuğrul 15.

Şok!!.. ÖTK Başkanı Tuğrul seçildi. Oysa yaptığımız tek şey, Seyhan'ın oylarını 4 tane artırmaktı. İşte bu tarz iki türlü seçimler de monotonluk kriterine aykırı düşebiliyor.

Biçim Biçim Seçim

Zaten başta Kenneth Arrow'un teoremi bizi uyarmıştı bu seçimlerin adil olmayabileceğine dair...O zaman yapacağımız şey, hangi seçimin daha adil olduğunu bulmaya çalışmak. Ama bunu da bir çırpıda söyleyebilmek kolay değil; seçmen sayısına, aday sayısına göre değişebiliyor. İki türlü seçim örneğini ve yol açtığı problemi henüz gördük. Üstelik bu tür seçimler maliyeti ve harcanan zamanı artırdığı gibi, iyi bir seçimde olması gereken pratiklik özelliğini de pek taşıyor. Şimdi kendi sistemimize geri dönüp geçen seçimleri düşünelim. Bir kişiyi tercih ettik, daha matematiksel ifade etmek gerekirse favorimize 1 diğer adaylara 0 puan verdik. Matematikçiler adayları sıraya koyup puan verme sisteminin daha iyi olduğunu, hatta kullandığımız 1,0,0,0...sisteminin en kötüsü olduğunu ispatlamışlardır. Çünkü bu metod seçmenin isteği hakkında çok daha az bilgi veriyor. Peki ya seçmen, adayların hepsini iyi tanımıyor, sıraya sokacak kadar iyi bilmiyorsa ne olacak. Donald Saari'nin de dediği gibi en iyisi sonuçların adilliğini sorgulamamak ve matematikçilerin üreteceği yeni sonuçları beklemek....

Nilüfer Karadağ

Kaynaklar
http://www.citl.ua.edu/math103/Voting/mathemat.htm
http://www.math.uvic.ca/faculty/diacu/voting.html
http://www.ams.org/new-in-math/mathnews/voting.html