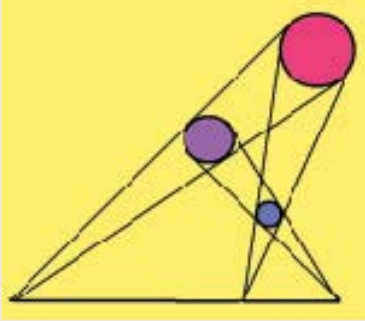




Teğetlerin Buluşma Noktası :



Şekildeki gibi birbirine eşit olamayan 3 daire alalım ve ikiyeşerli olarak ortak teğetlerini çizelim. Çok ilginç bir şekilde teğetlerin kesişme noktaları hep aynı doğru üzerinde bulunur. Daha da ilginç ise bu güzelliğin çok basit bir ispatının bulunması! Acaba bu ispatı bulabilir misiniz? (İpucu: daireler yerine küreler koyun ve iki düzlem kullanın.)

Lewis Carroll Problemi :

Bu ayki "Matematğin Şaşırtan Yüzü" bölümünde son derece ilginç bir olasılık problemini inceledik. İşte size bir o kadar ilginç ve güzel ola-

sılık problemi daha: Kapalı bir torbanın içinde hangi renkte olduğunu bilmediğimiz siyah veya beyaz bir top var. Torbaya beyaz bir top atıp karıştırıyoruz. Daha sonra bu torbadan rasgele bir top seçiyoruz ve bir bakıyoruz ki top beyaz renkte. Torbada kalan diğer topun beyaz olma olasılığı nedir? Tabi ki cevap 1/2 değil!

Uğurlu Evler :

Bir ülkedeki tüm evlerin kapı numaraları sadece altı basamaklı sayılardan oluşuyor (soruda 001234 sayısını da altı basamaklı olarak kabul edeceğiz). Ülkenin geleneklerine göre kapı numarasının ilk üç basamağındaki rakamlar toplamı son üç basamağındaki rakamlar toplamına eşitse, o eve "uğurlu ev" deniyor. Tüm uğurlu evlerin kapı numaraları toplamının (tüm sayıların kullanıldığını kabul edin) aslında en uğursuz sayı kabul edilen 13'e tam bölündüğünü gösteriniz.

Kendi Formülümüzü Kendimiz Yapalım :

Bu soruda sizden bir formül geliştirmenizi istiyoruz. Bu öyle bir formül olsun ki hem Pisagor teoremine ($x^2 + y^2 = z^2$) uyan 3 sayı versin hem de bu sayının en küçüğü bir küp olsun.

Geçen Ayın Çözümleri

İkizkenar Yamuk:

Sorunun püf noktası aslında DEB üçgeninin ya da CAF üçgeninin alanının yamuğun alanının yarısı olduğunu görebilmek. $DC = c$ ve $AB = a$ olsun. İkizkenar yamuk özelliğini kullanarak $AE = FB = (a-c)/2$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda DEB üçgeninin alanı:

$$A(DEB) = \frac{1}{2} \left[\frac{(a-c)}{2} + c \right] \cdot h = \frac{(a+c)h}{4}$$

olur. Aynı eşitlik tabi ki ACF üçgeni için de geçerlidir. İki üçgenin alanlarını topladığımızda dikkat ederseniz koyu gri bölgeyi iki kere toplamış olduk. Eşit alana sahip yamukta da açık gri alan toplanmadı. O halde bu iki bölgenin alanları eşit olmalıdır.

En Büyük Ortak Bölen:

Sayılarımız a ve b'nin en büyük ortak bölenini d ile gösterelim. Biz

$$\frac{(a+1)}{b} + \frac{(b+1)}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$$

eşitliğinin bir tamsayı olduğunu biliyoruz. Herbir a ve b sayısı ayrı ayrı d ile bölünebildiğine göre eşitlikteki payda d^2 ile bölünür. Eşitlik tamsayı olduğuna göre pay da d^2 ile bölünmelidir. Dikkat ederseniz a^2 ve b^2 zaten ayrı ayrı d^2 'ye bölünür. O halde geri kalan parça a + b de d^2 'ye tam bölünme-

lidir. Bu durumda sorudaki eşitliği artık gönül rahatlığıyla yazabiliriz: $\sqrt{(a+b)} \geq d$.

Akıldan Trigonometri Hesabı:

Doğru sıralama $b < a < c$ şeklinde olmalıdır. Kanıtlamaya geçmeden önce $(0, \pi/2)$ aralığında $\sin(x) < x$ olduğunu ve kosinüs fonksiyonunun bu aralıkta x'in artmasıyla azaldığını hatırlayalım. Şimdi $\sin(x) < x$ eşitsizliğindeki x yerine $\cos(x)$ 'i koyalım. $\cos$ 'un bahsettiğimiz azalan özelliğini dikkate alarak:

$$\sin(\cos(x)) < \cos(x)$$

$$\cos(\sin(x)) > \cos(x)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Eşitsizliklerdeki x yerine a, b, c sayılarını sırayla koyarak ve uygun düzenlemeleri yaparak şunu elde ederiz: $\cos(b) - b > \cos(a) - a > \cos(c) - c$. Ancak bize verilen aralıkta $y = \cos(x) - x$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon. Sonuç olarak $b < a < c$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir.

Ne Kadar Uzak?:

Bu son derece basit soruyu şu şekilde çözebiliriz: Çocuk elindeki külahtan ilk aşamada tüm tahtayı görebiliyor. Bu 12 tane iç içe çembere karşılık gelir. 3 metre yaklaştığında ise en dışta 8 numaralı çemberi görüyormuş. Yani son konumundan içiçe ancak 5 çemberi görebiliyor. Çocuğun elindeki külahın bakış açısı değişmediğine göre ilk ve ikinci konumu iki benzer üçgen oluşturur (çizerek görmenizi tavsiye ederim). Son durumda tahtaya uzaklığı x ise $5/12 = x/(x+3)$ olur ve $x = 15/7$ bulunur. Böylece çocuğun ilk başta hedef tahtasına 3 + 15/7 metre uzaklıkta olduğunu bulmuş oluruz.

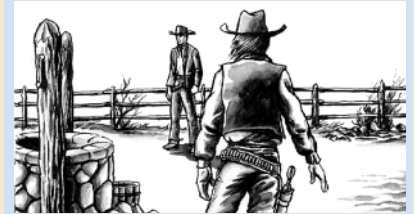
Matematğin Şaşırtan Yüzü

TRIELLOYA VAR MISINIZ?

Kabullenmesi biraz zor ama ne yazık ki temel bilimlerin ve mühendislik uygulamalarının sıçrama yaptığı tarihler, dünya savaşlarının en buhranlı yıllarına denk geliyor. Savaşın kaos ortamında matematik de birçok bilim dalında olduğu gibi kendi yıldızlarını yaratmak zorunda kalır. Matematik dünyasının bu karmaşa dönemlerinde yarattığı en önemli yıldızlardan biri ise John von Neumann'dır.

1903 yılında Budapeşte'de doğan Neumann, ilkokul çağlarında 8 basamaklı iki sayıyı akıldan çarpabiliyordu. Bu dahi özelliği sayesinde 10 yaşında üniversiteye kabul edildi ve 17 yaşında ilk makalesini çıkardı. Sadece matematik alanında değil, matematikteki yeteneğini kullanarak fizik alanında da kendini kanıtlamayı başardı. 1944 yılında *The Theory of Games and Economic Behaviour* (Oyun kuramı ve Ekonomik Davranış) adlı kitabın oyun kuramı bölümünü yazdı. Kitap ilk aşamada dikkat çekmedi ancak soğuk savaşa geçiş döneminde kitaptaki poker ve satranç gibi oyun stratejilerinin savaşta kullanılabileceğinin farkına varılması kitaba ve Neumann'a ilgiyi bir anda artırdı. Neumann'ın triello örneği, belki de oyun kuramının savaş stratejilerine nasıl uygulandığını göstermeye yarayan en güzel örnek. Gelin şimdi birlikte bir trielloya katılalım.

Triellonun düellodan en önemli farkı katılanların iki kişi yerine üç kişi olması. Triello yapma sebepleriyle ilgilenmediğimiz A, B ve C isiminde üç kişi olsun. A her 3 atışından ancak 1'ini vurabiliyor. Biraz daha iyi olan B, 3 atışın 2'sini isabet ettirebiliyor. Keskin nişancı C ise her attığını vuruyor. Üçü, yapacakları triellonun biraz daha adil olabilmesi için atış sırasının tek kişi kalana kadar A, B ve C olarak devam etmesini kararlaştırıyorlar. İlk atış sırası A'ya veriliyor. Sorumuz şu: Siz A'nın yerinde olsaydınız yaşama şansınızı arttırmak için ilk kime ateş ederiniz? Bir sonraki paragrafa geçmeden önce sorunun cevabı üzerine biraz düşünmenizi öneririm.



Birlikte A'nın ihtimallerini gözden geçirelim. A, ilk olarak B'ye ateş etsin ve şansının yardımıyla B'yi vursun. Bu durumda sıra C'ye geçer ve C tek rakibi olan A'yı bir güzel haklar. Bu ihtimal pek iyi sonuçlanmadı. O zaman A, ilk C'ye ateş etsin. Eğer C'yi vurabilirse B'nin atış yeteneğine göre A'nın 1/3 yaşama şansı olur. Bir öncekine göre daha iyi bir ihtimal gibi gözüküyor bu durum. Oysa A'nın yapabileceği daha iyi bir şey var o da havaya ateş etmek! Bu durumda sıra B'ye geçer. B, C'nin kendisine ateş edeceğini düşünerek en yakın rakibi C'ye nişan alır. Eğer C hayatta kalırsa o da en yakın rakibi B'ye ateş edecek ve de vuracaktır. A havaya ateş etmekle B veya C'den birisinin ilk turda elenmesini garantiye almış olur. Daha sonra triello düelloya dönüşür ve ilk atış hakkı yine A'nın olur. Görüldüğü gibi A kişisi (ya da A ülkesi) matematik sayesinde bu hayatı oyunu kazanma şansını arttırmıştır.