



M A T E M A T İ K K U L E S İ

E n g i n T o k t a ş
matematik_kulesi@yahoo.com

Geometrik Olasılık

Kenar uzunluğu a olan karenin içinden rastgele bir nokta seçiliyor. Bu noktanın en yakın kenara olan uzaklığının en yakın köşegene olan uzaklığından az olma olasılığı nedir?

Mansur CAN / Trabzon

(Bu soruyu Matematik Kulesi'ne gönderen okuyucumuzun adresine TÜBİTAK Yayınları'nın "Bir Sayı Tut (Malcolm E. Lines)" adlı kitabı postalanmıştır.)

α ve β 'nin Maceraları

α ve β asal olmayan iki doğal sayı. α 'nın bütün bölenleri $a, b, c, \dots, k$ ve β 'nin bütün bölenleri $s, t, u, \dots, z$ olsun. $a + b + \dots + k = s + t + \dots + z$ ve

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{k} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \dots + \frac{1}{z}$$

eşitliklerinin sağlanabilmesi için α ve β 'nin birbirlerine eşit olması gerektiğini ispatlayınız.

Estetik Burada!

Bu problemi çözdükten sonra, matematiğin bir resim kadar estetik ve güzel olduğunu savu-

nanların arası-
na eminim siz
de katılacaksi-
niz. Soru son
derece basit:
Yarıçapı 1 bi-
rim olan bir
daire içine çizil-
miş düzgün
onikigenin

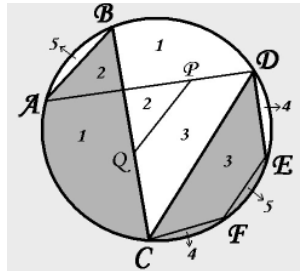


alanının 3'e eşit olduğunu kanıtlayınız. (İpucu: onikigeni 12 eşkenar ve 24 ikizkenar üçgene ayırın, birim daire etrafına bir kare çizin, karenin köşelerindeki onikigenin dışında kalan alanı da bir eşkenar ve iki ikizkenar üçgene ayırın.)

Matematiğin

Amansız Düşmanı

Ne mi? Tabi ki ezber! Matematik, mantığın ve gerçeğin ta kendisidir. Ne yazık ki ezber, matematiği bu güzel özelliklerinden mahrum bırakır. Gelin şu düşmanı birlikte yenelim: Hepimizin bildiği $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ cebirsel formülünü geometrik çizimle ispatlayalım. Sayenizde mantık = 1, ezber = 0.



Alanlar Eşit mi?

Sorudaki şekle 4 kiriş ekleyelim: AD, EF (AB'ye eşit ve paralel), FC (=ED) ve PQ (EF'ye eşit ve paralel). Şekilde de gösterildiği gibi çembere bu kirişler sayesinde 5 çift eşit alana böldük. Böylece iki rengin eşit alanlara sahip olduğunu ispatlamış olduk.

Moda Geçer Mod Kalır

Toplamanın son basamağı ile ilgilendiğimiz için işlemlerimizi mod 10'da yapmalıyız. Son basamakları aynı olan sayıların aynı üsleri mod 10'da aynı değeri verir. Bu güzel özellik sayesinde sadece $1^{1991}, 3^{1991}, 5^{1991}, 7^{1991}$ ve 9^{1991} değerlerini hesaplamak yeterli olacak. $1^{1991} = 1 \pmod{10}$ olduğu gayet açık. Gelelim diğerlerine: $3^4 = 1 \pmod{10}$ ise $3^{1991} = (3^4)^{497} \cdot 3^3 = 7 \pmod{10}$ olur. 5'in üssü olarak bir sayma sayısı alırsak her zaman son basamağı 5 olacaktır. O halde $5^{1991} = 5 \pmod{10}$ 'dur. 3'e benzer bir şekilde 7 için $7^4 = 1 \pmod{10}$ olur ve $(7^4)^{497} \cdot 7^3 = 3 \pmod{10}$ 'dur. Son olarak $9^2 = 1 \pmod{10}$ eşitliğini kullanarak $(9^2)^{995} \cdot 9 = 9 \pmod{10}$ sonucuna ulaşırız. 1,3,5,7 ve 9'daki kural sorudaki toplamda 199 kere tekrarlandığına göre $199 \cdot (1 + 7 + 5 + 3 + 9) = 5 \pmod{10}$ 'dur. Yalnız bu değere dahil etmediğimiz $1991^{1991} = 1 \pmod{10}$ 'u da eklemeliyiz. Sonuç olarak sorudaki uzun toplamın son basamağı 6 sayıdır.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Pierre de Fermat'ın ölümünden 5 yıl sonra oğlu Samuel, Diophantos'un yazdığı Arithmetica kitabının 8. bölümünde babasının şu notunu fark etti: "... genel olarak ikiden daha yüksek herhangi bir kuvveti aynı iki kuvvetin toplamı olarak yazmak imkansızdır." İşin garip tarafı muzip karakteriyle bilinen Fermat, matematik dünyasını 300 yıldan fazla uğraştıracak küçük bir not daha eklemeyi ihmal etmemişti: "Bu önermenin gerçekten de fevkalade bir ispatını yaptım, ama sayfa kenarı bunu göstermek için çok dar."

Tahminen 1637 yılında bu matematik macerasının başladığı yer olan Arithmetica'nın 8. bölümü Pisagor üçlülere ilgilidir. Hepimizin aşına olduğu $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayan 3,4,5 gibi doğal sayılara Pisagor üçlülere denir. Kitapta Pisagor'un bu özelliği sağlayan doğada sonsuz sayıda üçlü bulunduğu ile ilgili basit ama zarif bir ispatı vardır (Önümüzdeki sayılarda bu güzel ispatı "Matematiğin Şaşırtan Yüzü"nde sizinle paylaşmayı planlıyorum). Fermat tam da bu noktada düşünmeye başlar.

$a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda örnek bulabilmesine rağmen bir türlü $a^3 + b^3 = c^3$ eşitliğine uygun doğal sayılar bulamaz. Araştırmayı biraz daha derinleştirince ikiden daha büyük tüm üslerde aynı problemle karşılaştığını fark eder. Her ne kadar genel ispatı bulduğunu iddia etse de (yanlış anlaşılmasın Fermat'a güvenmiyor değiliz!) bunu bir kenara not etmez ve matematik dünyasında çok büyük bir tartışmanın startını vermiş olur. Bir tane bile $a^n + b^n = c^n$ eşitliğini sağlayan bir örneğin bulunamayışı Fermat'ın iddiasını kuvvetlendirmekteydi ancak genel bir ispat yapılmadan bundan kimse emin olamazdı. Euler, Cauchy, Langlands gibi birçok büyük matematikçi ispatlamayı denediyse de sonuca ulaşamadı. Artık tüm dünya bu ünlü problemle haberdardı. Gerek çözümüne konan para ödülleri gerekse çözümün bir şöret vaat etmesi amatöründen profesyoneline birçok matematikçiyi kendisine çekti. Ancak çözüm için insanoğlu 1993 yılına kadar sabretmek zorunda kalacaktı.

21 Haziran 1993 günü Isaac Newton Enstitüsü konferans salonunda bulunanlar bir tarihe şahitlik ettiklerinden habersizlerdi. Gerçi bazı dedikodular çıkmıştı ama kimse Andrew Wiles adlı yetenekli matematikçinin Fermat'ın son teoremini ispatlayacağına inanmıyordu. Wiles, 7 yıldır çalıştığı ve eşi hariç herkesten sakladığı ispatının başlıca noktalarını tahta başında anlattı. Büyük bir heyecan ve şaşkınlık içindeki dinleyiciler son cümle-
nin ardından çok büyük bir alkış kopardı. Matematikteki soru işaretlerinden birinin daha dramatik bir şekilde noktaya dönüştüğünün herkes farkındaydı. Andrew Wiles daha sonra, ispatındaki eksiklikleri de gidererek 200 sayfalık bir şaheseri yaratmış oldu. Kafalarda bugünlere kadar gelen tek bir soru işareti kaldı: Gerçekten de Fermat o deha zekasıyla 300 yıl önce herkesin gözünden kaçan bir ispat bulabilmiş miydi?



Matematik Yayınları
Pierre de Fermat, bir muziplik yaparak ortaya öyle ilginç bir soru attı ki matematik dünyası bu soruyla 300 yıl uğraşmak zorunda kalır. Simon Singh tarafından yazılan ve Pan Yayıncılık tarafından yayımlanan "Fermat'ın Son Teoremi" adlı kitap, mutlu sonla biten bu macera dolu yolculuğu son derece anlaşılır bir dille okuyucuya aktarıyor.

FERMAT'IN SON TEOREMİ



Geçen Ayın Çözümleri

Asil Bir Aritmetik Dizi

$k = 1, 2, 3, 4, \dots$ olmak üzere $30k + 7$ dizisi soruda bahsettiğimiz özelliklere sahip bir dizedir. Şimdi gelin bunu kanıtlayalım: p ve q iki asal sayı olsun. $30k + 7 = p + q$ eşitliği hiçbir zaman sağlanamaz. $30k + 7$ tek bir sayıdır ve iki asal sayının toplamının tek olabilmesi ancak asallardan birinin 2 ($q=2$) olmasıyla gerçekleşir. Bu durumda $p = 30k + 7 - q = 30k + 5 = 5(6k + 1)$ olur. Görüldüğü gibi p asal olamaz.

Şimdi de $30k + 7 = p - q$ eşitliğinin olamayacağını gösterelim. Yukarıda bahsettiğimiz sebepten ötürü yine $q = 2$ olmalıdır. Buna göre $p = 30k + 7 + q = 30k + 9 = 3(10k + 3)$ olur ve çarpanlara ayrıldığı için p de asal olamaz.

Kesirdeki

İlginç Eşitlik

Öncelikle kesirdeki genel kuralı formülize edelim:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)}{(2k+1) + \dots + [2(2k)-1]}$$

Formüldeki $k, 1, 2, 3, \dots$ gibi doğal sayıları temsil ediyor. Şimdi de 1'den $(2n-1)$ 'e kadarki tek doğal sayıların toplamını veren n^2 formülünden faydalanalım: $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$. Kendi eşitliğimizi bu formüle uyarladığımızda payın toplamı k^2 olur. Paydadaki toplam 1'den başlamadığı için 1'den $(2k-1)$ 'e kadar olan toplamı genel toplamdan çıkarmamız gerekir. Genel toplam $(2k)^2 = 4k^2$ dir. Çıkaracağımız kısım önceden bulduğumuz gibi k^2 dir. Sonuçta paydanın toplamı da $3k^2$ olur. Yani kesir $k^2/3k^2 = 1/3$ 'tür. Görüldüğü gibi k hangi değeri alırsa alsın sorudaki formülümüz her zaman $1/3$ değerini alır.