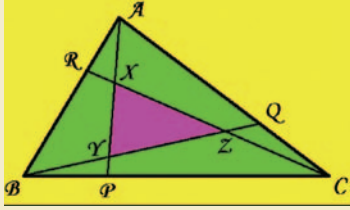




Kaçta Kaçı?



Sizin için cıvıl cıvıl renklere bezenen ABC üçgenimizde $3BP = BC$, $3CQ = CA$ ve $3RA = AB$ eşitlikleri bulunuyor. Ayrıca BQ, CR ve AP doğru parçaları ABC üçgenini şekildedeki gibi dört üçgene ve üç dörtgene bölüyor. Bu koşullarda, en içte bulunan ve ABC üçgeninin hiçbir kenarı ile komşu olmayan XYZ üçgeninin alanının, tüm alanın $1/7$ 'si olduğunu gösterebilir misiniz?

En Uygun Yer

İstanbul Modern'de (İstanbul Modern Sanatlar Müzesi'nde) duvara asılı olarak sergilenen 6 metre boyundaki dev bir tablonun yere en yakın kenarı tabandan 3,5 metre yükseklikte bulunuyor. Müzeyi zevkle gezen ve göz hizası yerden 1,5 metre yükseklikte bulunan bir sanatsever sizce duvardan ne kadar uzakta durmalı ki tabloyu en geniş bakış açısıyla görebilsin? Sanatsever dostumuz önerinizi büyük bir merakla bekliyor.

Geçen Ayın Çözümleri

Dört Meksikalı Problemi

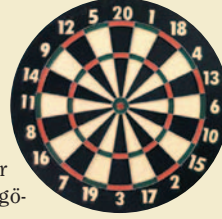
Dört Meksikalı dostumuzun arasında oluşan kare şekli, hareket başladıktan sonra sürekli dönerek küçülmektedir. Bu esnada her bir Meksikalının izlediği yolu ayrı ayrı inceleyecek olursak bu yolun bir spiral olduğunu kolayca görebiliriz. Karenin bir kenarının küçülme hızı Meksikalıların sabit hızı olan v 'ye eşittir. Yani karenin kenar uzunluğu başlangıçta s_0 ise anlık uzunluğu $s = s_0 - v \cdot t$ olur. O halde dört Meksikalı dost, karenin merkezinde $t = s_0/v$ süre sonra birbirlerine kavuşurlar.

En Büyüğün En Küçük Değeri

Soruda verilen toplamlara baktığımızda a ve g 'nin 1 kere, b ve f 'nin 2 kere, diğerlerinin ise 3 kere kullanıldığını görürüz. Şimdi en büyük toplam değerini bozmadan M 'yi şu şekilde gösterebiliriz: $M = \max(a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g) = \max(a, a+b, a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g, f+g, g)$. Böylece her harf 3 kere kullanılmış oldu. Harflerin toplamı 1 olduğuna göre eşitliğin ikinci kısmındaki tüm toplamların toplamı 3 olur. Eğer M 'nin en küçük değeri almasını istiyorsak her bir toplamın ortalama değeri olan $3/9 = 1/3$ değerini aşmamalı. Çünkü ortalama değeri aşan toplam, $1/3$ 'ten daha büyük M değerini verir. O halde $(a,b,c,d,e,f,g) = (1/3, 0, 0, 1/3, 0, 0, 1/3)$ olur.

Matematikçi Gözüyle Dart

Şimdi birçoğumuzun büyük bir zevkle oynadığı dart oyununa bir matematikçinin gözüyle bakalım. Varsayalım ki oynarken nişan aldığımız sayıyı %50 olasılıkla vurabiliyorsunuz. Vuramadığınız zamanlarda da okunuz %25 olasılıkla ya nişanladığınız sayının sağındaki komşu sayıya gidiyor ya da %25 olasılıkla solundaki komşu sayıya. Bu durumda (bonus bölgeleri düşünmeden) hangi sayıyı nişan almalısınız ki tüm oyun sonunda en yüksek puanı toplayabilesiniz? Acaba gerçekten doğru sayı 20 mi?



Faktöriyel Sayı Avı

Faktöriyel hesaplamaları, gazete ve dergilerdeki matematik bulmacaları köşelerinin her zaman baş konuklarından biri olmuştur. Biz de bu güzel konuyu naçizane sayfamızda büyük bir onurla konuk ediyoruz. Sorumuz şöyle: Rakamlarının faktöriyelleri toplamı kendisine eşit olan tüm üç basamaklı sayıları bulunuz. Yani sorunun çözümü için $abc = a! + b! + c!$ ($a \neq 0$) eşitliğini sağlayan üç basamaklı abc sayılarını arıyoruz. Gelin bu sayıları kafa kafaya verip hep birlikte bulalım.

Logaritmik Eşitsizlik

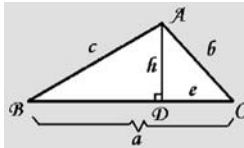
Logaritmanın en temel özelliklerinden birini kullanarak soruyu şöyle değiştirelim:

$$\log_a 10 + \log_{10} a = \frac{\log 10}{\log a} + \frac{\log a}{\log 10}$$

$\log 10 = 1$ olduğu için aslında sorunun bizden istediği $(\log a + 1 / (\log a))$ değerinin 2'den büyük olduğunu göstermemiz. $\log a = x$ dersek fonksiyonumuz $f(x) = x + 1/x$ olur. $f(x)$ fonksiyonunun türevini alıp sıfıra eşitlediğimizde max. min. noktalarını elde ederiz. $f'(x) = 1 - 1/x^2 = 0$ olduğu için $x=1$ noktası max. min. noktalarından birini oluşturur. $\log a = -1$ olamayacağı için ikinci çözüm dikkate alınmaz. Bu max. min. noktasında fonksiyon $f(x) = 2$ değerini alır. Birkaç değer kopya denediğimizde aslında bunun min. noktası olduğunu anlarız. O halde diğer değerler için fonksiyon hep ikiden büyük değerler alır ve $f(x) \geq 2$ önermesi doğrulanmış olur.

Heron Teoremi

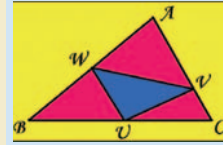
Şekle göre $c^2 - (a-e)^2 = h^2 = b^2 - e^2$ ve $c^2 - a^2 + 2ae = b^2$ eşitlikleri yazılabilir. Buradan $a = [a^2 + b^2 - c^2] / 2a$ olur. Üçgenin alanı T iken sırasıyla şu eşitlikleri elde ederiz: $2T = a \cdot h \Rightarrow 4T^2 = a^2 h^2 = a^2 [b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) / 4a^2] \Rightarrow 16T^2 = 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. İki kare farkı formülünü kullanarak en son eşitliği düzenleyelim ve böylece ispatı tamamlayalım: $16T^2 = [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)] = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$.



Matematğin Şaşırtan Yüzü

FAGNANO PROBLEMİ

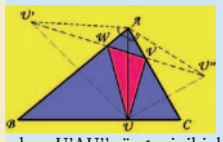
İnsanoğlunun gizemli bir cazibeye sahip olan üçgenin peşinden binlerce yıldır deli divane koşması, aslında kolay kolay açıklanacak bir durum değil. Nasıl oluyor da bu kadar basit bir geometrik şekil hâlâ çekiciliğini koruyabiliyor? Bu sorunun cevabı şu olsa gerek: "Keşfedilmeyi bekleyen o bitmek tükenmek bilmez sırların, üçgenin benliğinde bir şekilde hâlâ var olmaları". Bu ayki yazımız "Fagnano Problemi" olarak bilinen ve ancak 1900 yılında çözülebilen, üçgenin ilginç sırlarından biri üzerine olacak.



F a g n a n o problemi bizden şu soruya cevap vermemizi ister: "Dar açılı bir üçgenin içine çizile-

bilecek en küçük çevrelü üçgen hangisidir?". Bu sorunun uzun süre beklemek zorunda kalan çözümünü ünlü Macar matematikçi L. Fejer'e (1880-1958) borçluyuz. Fejer çözümü 1900 yılında Berlin'de öğrenciyken bulmuş. Şimdi gelin Fejer'in güzel çözümünü inceleyelim:

Işığın her zaman en kısa yoldan gitme ilkesi, "yansıma" adıyla geometrilere ilham kaynağı olmuştur. Bu soruda da Fejer, AB ve AC kenarlarını ayna gibi düşünerek U noktasının ayna görüntüleri olan U' ve U'' noktalarını bulur. Daha sonra kenar eşitliklerinden $U'W + WV + VU'' = UW + WV + VU$ eşitliğine ulaşır. Bu eşitliğe göre UW üçgeninin çevresinin en kısa olması için, W ve V noktalarının U'' doğrusunun üçgen ile kesiştiği noktalar olması gerekir. Uygun W ve V noktalarını verilen U' 'ye göre seçebildiğimize göre, sorun olarak sadece en uygun U noktasını seçmek kalıyor. Bu da bizi çözümün ikinci aşamasına taşıyor.



Üçüncü şekle göre AB ve AC sırasıyla UU' ve UU'' 'nin orta dikmeleri olduklarından $U'AU''$ üçgeni ikizkenar bir üçgen olup $AU' = AU'' = AU$ dur. $U''U'$ tabanının uzunluğu UVW üçgeninin çevresine eşittir. $U'AU''$ açısı BAC açısının iki katı olduğundan $U'AU''$ açısı sabittir. Bu yüzden $U''U'$ tabanı, $U'AU''$ üçgeninin eşit kenarları minimum olduğunda en küçük değerini alır. Kenarlar da AU minimum olduğunda en küçük değerini alırlar. AU'nun minimum olması için BC'ye dik olması, yani diğer bir deyişle, üçgenin BC kenarına inen yüksekliği olması gerekir. Artık U noktasını nereden alalım gerektiğini de biliyoruz. Bu U' 'ye göre W ve V noktalarını nasıl seçeceğimizi çözümün birinci bölümünde anlatmıştık. O halde Fagnano probleminin çözümünü tamamladığımızı iç rahatlığıyla söyleyebiliriz.