

DÜĞÜMLENMİŞ DNA'LARIN ÇÖZÜLÜŞ ÖYKÜSÜ

MATEMATİKTE

DÜĞÜM KURAMI

Sanat sanat için mi yapılır yoksa halk için mi? İnsanoğlunun yüz yıllardır tartıştığı bu soruya kimisi sanat için, kimisi de halk için yanıtını verir. Aslında bu sorunun cevabı koşullara göre değişiyor. Çünkü toplumun yapısı ve sosyal değerler değiştikçe; örneğin toplum içinde cahillik, yoksulluk, adaletsizlik gibi koşullar kötüye doğru gittikçe sanat doğal olarak halk için yapılmaya başlanıyor. Halkın sosyal durumu düzeldikçe de sanat sanat için yapılmaya başlanıyor. Peki matematik sanatına ne dersiniz? Evet matematik de bir sanat. Sanatın diğer dallarından tek farkı, onlar gibi öznel değil de nesnel olması; başka bir deyişle içinde doğru ve yanlışların belirgin bir şekilde ifade edilmiş olması. Bugüne kadar, daha çok bilimin bir dalı olarak bildiğiniz matematiğin diğer bilimlerden farkıysa, (yalnızca matematikçilerin değil) bakan her insanın gördüğü bir estetik güzelliği içinde barındırması. Bir teoremin güzelliği, onun yazılışındaki ve ispatlanışındaki estetik, incelik ve kıvrak zekanın göstergesiyle yorumlanır. Matematik de bir sanat olduğuna göre ne için yapıldığının tartışılması kaçınılmaz oluyor.

Matematik Matematik İçin mi Yapılır Yoksa Halk İçin mi?

Bu aynı soru olduğuna göre cevabım yine aynı: Gerekli zaman halk için, gerektiğinde de matematik için yapılır. Burada uygulamalı matematiği halk için, pür matematiği de matematiğin kendisi için yapılan sanat diye örneklendirmek sanırım yanlış olmaz. Kumarbazların matematikçilerden ricası üzerine ortaya çıkan ve gelişen

olasılık kuramının, görevini yerine getirdikten sonra bugünlerde teknolojiye uygulanamayacak kadar ileride bir yerde olması buna güzel bir örnek...Ama biz burada daha güncel ve bu nedenle daha az tanınmış başka bir örneği inceleyeceğiz. Bu defa yardım isteyen taraf mikro-biyologlar...

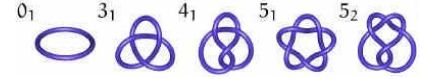
Bir Kuramın Doğuşu

Matematiğin pek çok dalı ihtiyaç üzerine ortaya çıktı. 19. yüzyıl sonlarında fizikçiler atomun temel özelliklerini araştırırken, pek çok bilim adamı ortaya kendi teorisini ve atom modelini koyuyordu. O dönemlerde klasik fiziğe çok fazla katkıda bulunan fizikçi ve matematikçi William Thomas Kelvin de bu bilim adamlarının arasındaydı. Sıcaklık birimine vermiş olduğu soyadından mı kaynaklanıyor bilinmez, Kelvin'in matematikçi yönünden pek kimse haberdar değildir. Oysa o, henüz 10 yaşında, matematik profesörü olan babası sayesinde, matematiğin en son konularından dahi haberdar bir şekilde Glasgow Üniversitesinde eğitimine başlamıştı. Kelvin'in teorisine göre atomlar eterler (açık uzayda varolduğu sanılan dolgu maddesi) etrafında düğümlenmiş boru şeklinde idi. Bu düğümlerin çeşitliliği beraberinde kimyasal elementlerin çeşitliliğini ve türü de maddenin sağlamlığını açıklayacaktı. Öyleyse bu konuya açıklık getirmek için "2 düğümün birbiriyle ne zaman aynı olduğunu" ya da daha kolay bir soru olan "ne zaman aynı olmadığını" bilmek gerekiyordu. (İkinci sorunun neden daha kolay yanıtlandığı yazımızın ilerleyen kısımlarında açığa kavuşacak) 20. yüzyılda araştırmaların hız kazanmasıyla Kelvin'in ki de dahil olmak üzere pek çok atom teorisi teker te-

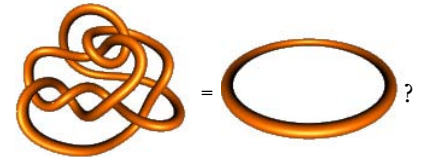
ker elenmeye başlamıştı. Düğümlerin yapısını inceleyen fizikçiler de bu işten vazgeçtiler. Ama güzel bir soru yakalayınca en büyük zevki onu çözmek olan matematikçiler, bir soruya yeni bir kuram daha yazdılar: Düğüm Kuramı!

Düğüm Kuramı

Elinize bir parça ip alın istediğiniz gibi evirin, çevirin, düğümleyin ve sonra iki ucunu birbirine yapıştırın işte adına kuram yazılan düğümün matematikteki karşılığı bu.



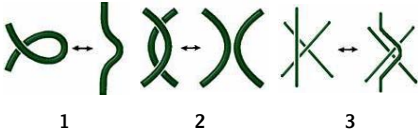
Bu şekillerden ilki (0_1) hiç işlem yapılmadan birleştirilmiş buna basit düğüm diyelim. Öyleyse önümüze gelen bir şekil için öncelikle karar vermemiz gereken, onun basit düğüm olup olmadığı. Daha matematiksel ifade edersek: Şekilde oyunun kurallarına göre değişiklik yaparsak elde edeceğimiz yeni şekil 0_1 ile aynı olur mu? Örneğin, şu iki şekil hiç belli etmese de aynı olabilir:



Oyunun Kuralları

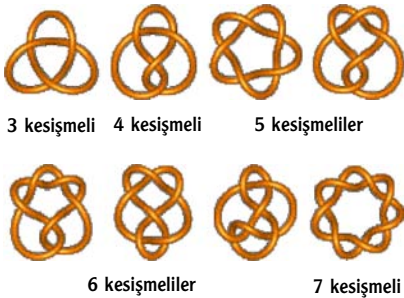
Üç tane Reidemeister hareketi denen kuralımız var. Bunlar, Alman matematikçi Kurt Reidemeister tarafından bulundu. Yine aynı kişi tarafından düğümde hiçbir değişiklik yapmadan uygulanabilecek bütün dönüşümleri

içerdiği ispatlandı. Bu işlemlerin uygulandığı iki düğüm aynı hale gelebiliyorsa, o iki düğüm birbirine eşittir diyebiliriz. İşte kurallar:



Değişmezler

Matematikte değişmezlerin önemi çok büyük. Herhangi bir dönüşüm altında değişmeden kalan bir özellik kuramın ilerlemesinde çok büyük fayda sağlar. Bunlardan biri, minimum kesişme sayısı. Bir düğümün (reidemeister hareketleri uygulanmış bütün) diyagramlarından en az kesişmeyle çizilmiş olanındaki kesişmelerin miktarı, minimum kesişme sayısını (mks) belirler. Yani, basit düğümde hiçbir kesişme sayısı olmadığından, mks (0)=0 diyebiliriz. Buradaki güzellik şudur: İki düğümün mks'si farklıysa, onlar kesinlikle farklı düğümlerdir fakat aynıysa, bir şey diyemeyiz. Belki de bu nedenle iki düğümün farklı olduğunu anlamak, aynı olduğunu anlamaktan daha kolaydır. Örneğin, verilen şu şekilde hepsi birbirinden farklı düğümler sergileniyor:



Yine de biz bu kadarlık bilgiyle bu 6 kesişmeli düğümlerin diyagramları farklı diye farklı olduklarını henüz söyleyemeyiz (matematikçiler farklı olduklarını söylüyor. Şunu da belirtiyim ki mks'si 1 ya da 2 olan hiçbir düğüm yok, isterseniz deneyin!



Buraya kadar hep düğümlenmiş sicimlerden bahsettik. Sanırım bu düğümleri ne zaman çözmeye geçeceğimizi merak ediyorsunuz. Tabii ki basit düğüm haricindeki (o zaten çözülmüş durumda) hiçbir düğümü ipi kesmeden çözemeyiz. Ama ipi çözdükten

sonraki zorluklar da kademe kademe... En az kaç kere kesişme değiştirirsek bu, o düğümün çözülme sayısı (çs) oluyor? Basit düğümünki yine 0. Aşağıdaki yonca düğümüne de 1 değişiklik yetiyor. Yani minimum kesişme sayısı 3 olan bu düğümün çözülme sayısı 1.



Öyleyse artık işimiz kolaylaştı. İki düğümün mks'si aynı mı? O zaman çs'sine bakarız. Farklıysa, gönül rahatlığıyla bu 2 düğüm birbirinden farklı diyebiliriz; ama o da aynıysa, başka bir değişmeze daha başvurmalıyız.

Düğümleri Renklendirelim

Bu değişmezi de düğümü renklendirerek elde ediyoruz. Teoriye göre bir düğüm ya 3 renkle boyanır ya da boyanmaz. (Bir diyagram 3 renkle renklendirilebiliyorsa, bütün diyagramları da öyledir) Boyamanın kuralları şöyle:

- Bir kesişmede bulunan 3 parça için ya 3 farklı renk kullanılacak
- Ya da 3 ü de aynı renge boyanacak

"Yok! bu değişmez de fayda sağlamadı; herşey hâlâ aynı" diyorsanız, ya Reidemeister işlemleriyle birinin diğerine eşit olduğunu ispatlamalısınız bu da olmuyorsa acilen kuramı çalışmaya başlayıp daha ileri teknikleri öğrenmelisiniz.

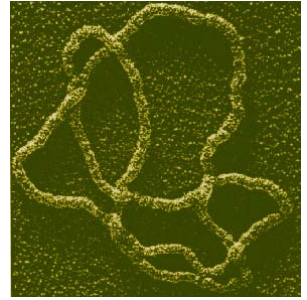
DNA'lar da Düğümleniyor!

Buraya kadar düğüm kuramı hakkında basit ve bence başlangıç için yeterli bir giriş yaptık. Artık bilgi seviyelerimiz çok önemli bir uygulamadan haberdar olabilmemiz için yeterli konuma geldi. Hücrenin genetik materyali olan ve yaşama dair bütün genetik kodu içinde barındıran DNA'nın 1953'te Crick ve Watson tarafından keşfedilen ikili sarmal bir yapıya sahip olduğu, artık siz Bilim ve Teknik okurlarına yeni bir bilgi değil. Bu sarmal yapısının yanı sıra, DNA düşündüğümüzden çok uzun bir yapıya sahip. Vücudumuzdaki bütün DNA'ları birbirine eklessek dün-

yadan aya giden yolu 6000'e katlarız desem kafanızda bu uzunlukla ilgili bir şeyler canlanır sanırım ki. Bu uzunluktan dolayı kromozomların içinde sıkıca paketlenmiş halde bulunan DNA'lar zaman zaman düğümleniyor. Eğer enzimler iyi çalışmıyorsa bu düğümler DNA'nın fonksiyonunu yerine getirmesini engelliyor çünkü hücre bölünmesi sırasında kendini eşleyebilmesi için ikili sarmal yapının birbirinden ayrılması ve böylece enzimlerle etkileşmesi gerekir. 1980'lerde mikrobiyologlar matematikçilerden işte bu düğümlenmiş DNA'ların analizi için yardım istediler.

Düğüm Kuramı Nasıl Yardımcı Olabilir?

Matematikçiler DNA'nın içine girdiği bu düğümleri çözecek değil. Öyleyse nasıl yardım edecekler? Her zaman yaptıkları gibi nesneyi soyutlaştırıp analiz edecekler. Artık



DNA'nın sayıda kesişmesi olan, çözülmesi için m sayıda kesik değiştirilmesi gereken topolojik bir problem. Şekildeki DNA, minimum kesişme sayısı 6 olan bir düğüm haline gelmiş. Çözülme sayısının büyüklüğüne göre bu düğümün çözülmesinin kolaylık derecesi de ortaya çıkacak. Bu da onu çözümlen enzimlerin özelliklerini ortaya koyacak. Bu sayede topolojik metotlarla biyologlar artık pek çok enzimi birbirinden ayırt edebilecekler.

Yaşayan Matematik

Bu kuramı gören kimin aklına gelir ki bizi oluşturan her zerrenin içinde böyle düğümler olduğu ve onların analiz edilmesiyle insanlık için çok önemli bilgilerin ortaya çıkacağı? Ama durun daha bitmedi! Matematik yaşıyor. Her an yeni üretimler, yeni uygulamalar karşımıza çıkabilir ve bizi şaşırtabilir. Artık matematiğin 3-5 sayıyla bezenmiş formül yığını; birbirine iliştilenmiş bir kaç üçgen içeren bir şekilden ibaret sıkıcı bir ders olmadığını kabul etme zamanı geldi...

Nilüfer Karadağ