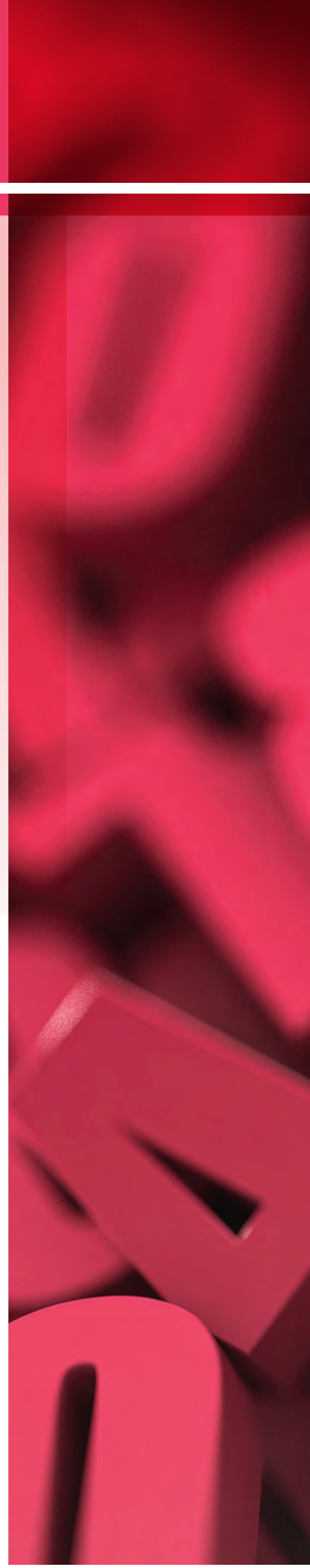
Gizemli Matematiksel Köprüde Çığır Açıcı Gelişme



İlay Çelik Sezer [*TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*
Prof. Dr. Ekin Özman [*Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü*

Matematikteki pek çok önemli sonuç birbirinden uzakmış gibi görünen alanlar arasında kurulan bağlantılar hakkındadır. Ünlü matematikçi Andrew Wiles 1990'lı yıllarda "Fermat'nın son teoremi" diye bilinen teoremi ispatladığında, birbiriyle ilgisiz gibi görünen iki alan (Diophantine Denklemleri ile otomorfik formlar) arasında bir köprü kurulabilmesi ümidi doğmuştu.

Wiles'ın ispatının ardından çok sayıda matematikçi kariyerini söz konusu köprüyü geliştirmeye adadı. Ancak bu çalışmalar bir türlü aşılamayan bir engele takılmış durumdaydı. Son yıllarda yayımlanan iki makale işte bu engelin aşılmasını sağladı.

Pierre de Fermat (1601-1665)

1990'ların başında Andrew Wiles'ın Fermat'nın son teoremini kanıtlaması sadece matematik dünyası için değil tüm insanlık için muazzam bir adım diye kabul edilir. Teoremin ifadesi oldukça basittir:

$x^n + y^n = z^n$ eşitliğinde, n'nin 2'den büyük değerleri için pozitif tam sayı çözümü yoktur. Bu denklem Fermat denklemi olarak bilinir.

Fransız matematikçi Pierre de Fermat, teoremi Yunan matematikçi Diophantus'un *Arithmetica* adlı kitabının bir nüshasında bir sayfanın kenar boşluğuna çiziktirivermiş, yanına ise pek de hoş anılmayan bir not düşerek, teorem için bu kenar boşluğuna sığdıramayacağı uzunlukta gerçekten olağanüstü bir ispat keşfettiğini belirtmişti. Bu basit iddia, 350 yıldan uzun bir süre boyunca pek çok matematikçiyi cezbedip uğraştırdı. Yüzyıllar boyunca gerek profesyonel matematikçiler gerekse amatör meraklılar Fermat'nın yazmadığı ispatın ya da bu teoremin herhangi bir ispatının peşinden koştu.

Wiles'ın (Richard Taylor'ın da yardımıyla) bulduğu ispat, Fermat'nın asla hayal edemeyeceği bir ispattı. Teoremin üstesinden dolaylı olarak geliyor ve bunu matematik dünyasındaki -tabiri caizse- iki uzak kıta arasında bir köprü kurarak yapıyordu. Daha önce matematikçilerin var olduğunu sezdiği ancak kuramadığı bu devasa köprüyü bulan Wiles, aslında bu köprüyü iki kıta üzerindeki çok küçük iki kara parçası arasında kuruyordu. Yepyeni derinlikli fikirlerle dolu olan bu ispat, akabinde köprünün her iki tarafına dair bir sonuçlar silsilesini de tetikledi. Bu açıdan Wiles'ın büyüleyici ispatı aslında çok daha büyük bir bulmacanın minicik bir parçasını çözmüş oldu.

Imperial College London'dan Toby Gee'ye göre ispat, 20. yüzyıl matematiğindeki en iyi keşifler arasındaydı ancak aynı zamanda varlığı önceden kestirilmiş olan ve Langlands köprüsü olarak anılan köprünün sadece küçük bir parçasıydı. Köprünün tamamlanmış hâli ise kavramları bir taraftan diğer tarafa geçirerek matematiğin alabildiğine engin ufuklarının aydınlatılabilmesi ümidini doğuracak. Zira, Fermat'nın son teoremi de dâhil olmak üzere pek çok problem köprünün bir tarafında zor görünürken diğer tarafa taşındığında çok daha kolay problemlere dönüşüyor.

Wiles'ın ispatının ardından başka matematikçiler büyük bir hevesle çalışarak onun kurduğu köprüyü iki kıtanın daha büyük kısımlarına doğru genişletti. Ancak bir noktada bir çeşit duvara tosladılar. Köprüyü genişletmeye yönelik iki doğal yön bulunuyor ancak her iki yön için de Taylor-Wiles yöntemi aşılması imkânsız görünen bir engele takılıyordu. Bu engelin aşılabilmesi pek çok matematikçinin hayaliydi. Ne var ki bunun başarılması pek mümkün görünmüyordu.

İşte yakın zamanda yayımlanan ve bir düzineden fazla matematikçinin emeği geçen iki makaledeki sonuçlarla, bu engelin üstesinden gelinerek yukarıda bahsettiğimiz her iki doğal yönün de önü açıldı. Elde edilen bulguların Fermat'nın son teoreminin pozitif tam sayıların ötesinde, başka sayı sistemleri için de ispatlanmasına yardımcı olabileceği düşünülüyor.

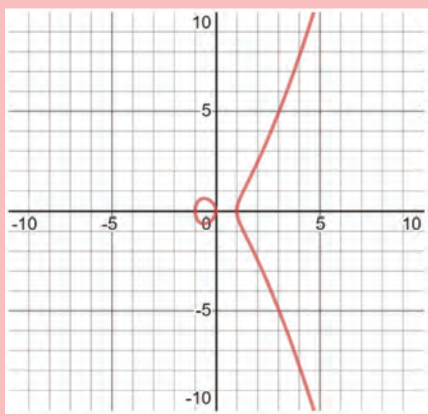
Fermat'nın son teoremini ispatlayan Andrew Wiles 2016'da Abel Ödülü'nü kazandı.

Boşluktaki İğne

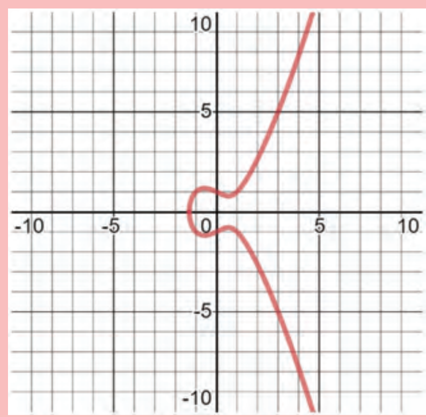
Langlands köprüsünün bir tarafı kurulabilecek en basit denklemlerden olan "Diophantine" denklemlerine odaklanır. "Diophantine" denklemleri $y = x^2 + 6x + 8$ ya da $x^3 + y^3 = z^3$ gibi, değişkenlerin, üslerin ve katsayıların kombinasyonları biçimindedir. Binlerce yıl matematikçiler tam sayıların hangi kombinasyonlarının belirli bir Diophantine denklemini sağladığını bulmaya çalıştı. Temel motivasyonları bunun son derece basit ve doğal bir soru olması idiyse de bu çalışmaların bir kısmı kriptoloji gibi alanlarda önceden öngörülemeyen uygulamalar buldu.

Eski Yunan'dan bu yana matematikçiler, sadece iki değişkeni olan ve üssü 1 ya da 2 olan Diophantine denklemlerinin tam sayı çözümlerini bulmayı biliyordu. Ancak daha yüksek üslere sahip denklemler için tamsayı çözümleri bulmak hiç de kolay değil. Bu durumun ilk örneklerinden olan eliptik eğrileri temsil eden denklemler, sol tarafında y^2 ve sağ tarafında en büyük kuvveti 3 olan, yani x^3+4x+7 gibi bir ifade bulunan denklemlerdir. Bunlar, daha düşük kuvvetli denklemlere göre, Gee'nin ifadesiyle "katbekat daha zor problemler" oluşturur.

Eliptik Eğriler



$y^2 = x^3 - x$



$y^2 = x^3 - x + 1$

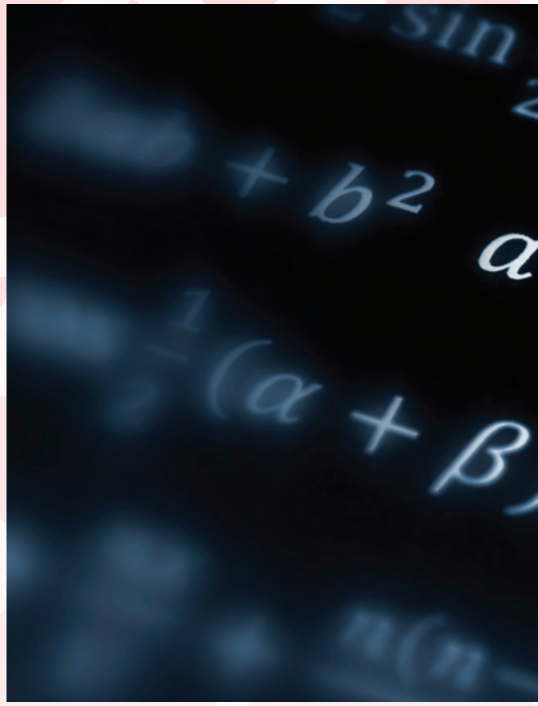
Matematikte eliptik bir eğri, aşağıda gösterilen biçimdeki bir düzlemsel cebir eğrisidir:

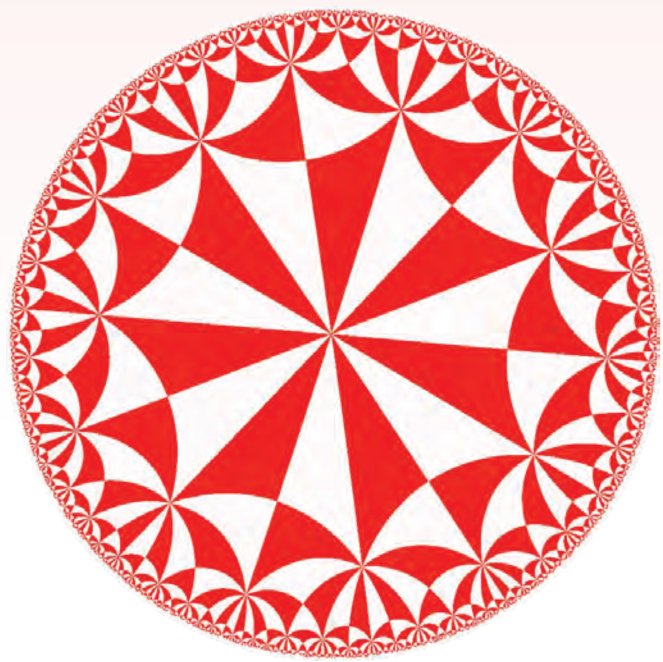
$y^2=x^3+ax+b$

Bu eğriler düzgün eğrilerdir, yani sivri köşeleri yoktur ve kendileriyle kesişmezler. Grafiklerde iki eliptik eğri örneği gösteriliyor.

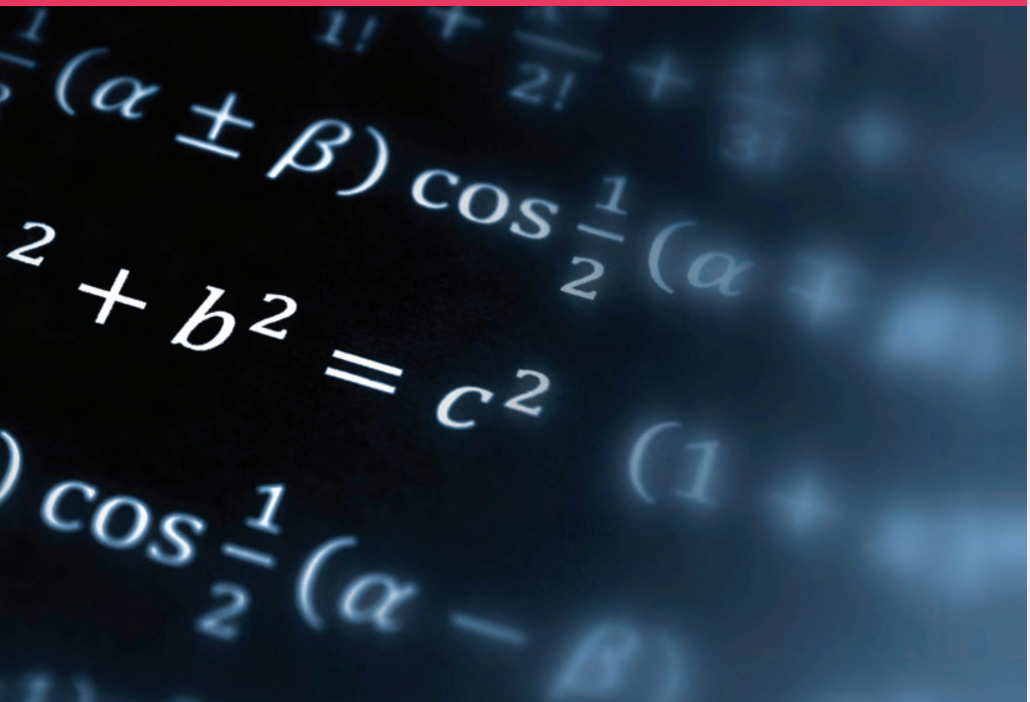
Köprünün diğer tarafında ise otomorfik formlar olarak adlandırılan, bazı fayans bezemelerindeki simetrik desenlere benzetilebilecek matematiksel nesneler vardır. Wiles'ın çalıştığı problemde bu fayans bezemeleri meşhur grafik sanatçısı M. C. Escher'in, kenarlara doğru giderek küçülen balıkları resmettiği iki boyutlu mozaiklere benzetilebilir. Daha geniş Langlands evreninde ise fayans bezemelerinin üç boyutlu bir topu kapladığı ya da daha yüksek boyutlu bir uzayı doldurduğu hayal edilebilir. Aslında Wiles'in kurduğu köprünün bir tarafında otomorfik formların özel bir tipi olan modüler formlar yer alır. Modüler formlar, kompleks düzlemin üst yarısında tanımlı oldukça simetrik fonksiyonlardır. Tıpkı sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının kendini tekrar eden değerler alması gibi, modüler formlar da bunlara benzer ancak çok daha karmaşık simetriler içerir. Düzlemde tanımlı, yani iki boyutlu modüler formlar, üç boyuta geçildiğinde yerlerini otomorfik formlara bırakır.

Bu iki matematiksel nesne türü (Diophantine denklemleriyle otomorfik formlar) tabiri caizse tamamen ayrı telden çalar. Bununla birlikte 20. yüzyılın ortasında ispatlanan sonuçlarla bu iki nesne arasındaki derin ilişkiler ortaya çıkmaya başladı. 1970'lerin başlarında İleri Araştırmalar Enstitüsünden (Institute for Advanced Study) Robert Langlands, Diophantine denklemleriyle otomorfik formların birbirine çok özel bir biçimde karşılık geldiği yönünde bir sanı öne sürdü.





Wiles'ın çalıştığı problemdeki otomorfik formlar M. C. Escher'in, kenarlara doğru giderek küçülen balıklar ya da başka figürleri resmettiği mozaiklere benzetilebilir (solda). Sağda ise bilgisayar yardımıyla oluşturulmuş bir otomorfik form temsili görülüyor.



Buna göre hem Diophantine denklemlerinin hem de otomorfik formların sonsuz bir sayı dizisi üretmesinin doğal bir yolu vardır. Bir Diophantine denklemi için, denklemin her bir modüler aritmetik sisteminde kaç çözümü olduğu sayılabilir. Bu çözümler doğal olarak bir sayı dizisi oluşturur. Langlands köprüsünde görünen türden bir otomorfik form için de benzer bir sayı dizisi tanımlanabilir. Örneğin, otomorfik formların özel bir tipi olan modüler formları sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yazmak mümkündür. İşte bu yazımdaki sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının katsayılarından oluşan dizi de modüler forma karşılık gelen dizi olur. Langlands,

Modüler Aritmetik

Modüler aritmetik matematikte sayıların mod denilen belirli bir değere ulaştığında “başa sardığı”, tam sayılarda geçerli bir aritmetik sistemidir. Modüler aritmetiğe ilişkin modern yaklaşım Carl Friedrich Gauss tarafından geliştirilmiş, Gauss’un 1801’de yayımlanan *Disquisitiones Arithmeticae* kitabında açıklanmıştı.

Modüler aritmetiğin aşina olduğumuz bir kullanımı, bir günün iki adet 12 saatlik devreden oluştuğu 12 saatlik saat gösterim sistemidir. 12’li saat aritmetiğinde saat zamanı 12 saatte bir “başa sarar”, yani mod 12’dir. Buna göre, örneğin şu anda saat 7.00 ise 8 saat sonra saat 3.00 olacaktır, yani bu sistemde 7+8 = 3 eşitliği geçerlidir.

Diophantine denklemleri için mod sayısının asal sayı olduğu modüler aritmetik sistemlerindeki çözümler söz konusu olduğunda, bu iki dizinin (Diophantine denklemlerinden gelen dizi ile otomorfik formlardan gelen dizinin) şaşırtıcı biçimde birbirine karşılık geldiği sanısını ortaya attı. Apayrı matematiksel dünyalardan gelen bu objelerin birbirine karşılık gelmesi devrim niteliğinde oldu.

Örneğin, University of Chicago’dan Matthew Emerton bu bağlantının “telepatiden de tuhaf” olduğunu düşünüp şöyle demişti: “Bu iki tarafın birbiriyle iletişim biçimi… 20 yıldan fazladır bunu incelediğim hâlde bana olağanüstü ve büyüleyici geliyor.”.

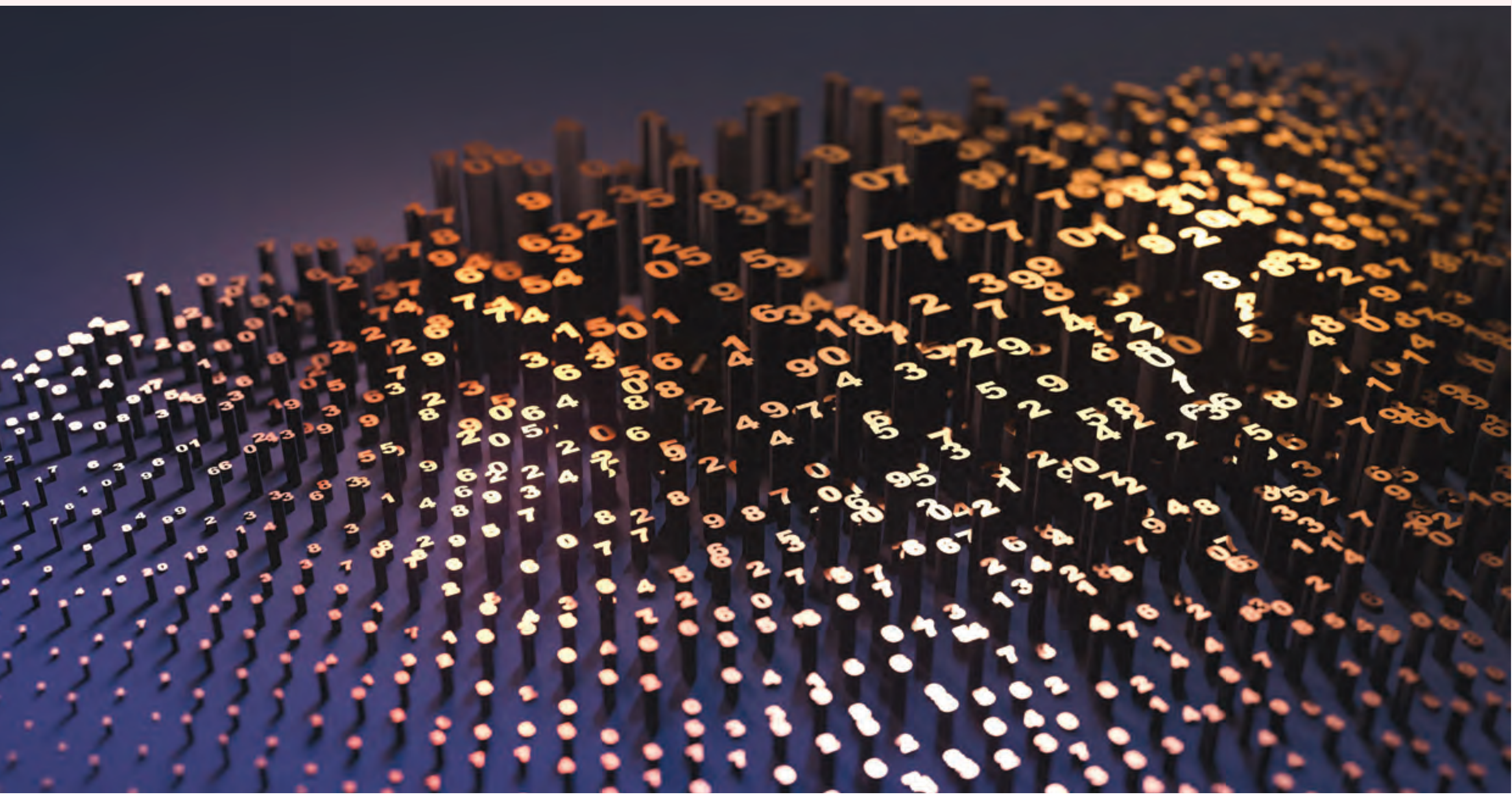
Aslında söz konusu köprünün bir yönünün başlangıcı 1950’lerde ve 1960’larda oluşturuldu: Japon matematikçi Goro Shimura önderliğindeki ekip, belirli modüler formlardan yola çıkıp katsayıları rasyonel sayılar olan eliptik eğrilere -ki bunlara rasyonel eliptik eğri denir- nasıl gidileceğini keşfettiler. Daha sonra 1990’larda Wiles, Richard Taylor’ın da katkılarıyla belirli bir eliptik eğri ailesi için köprünün diğer yönünü de inşa etti, yani belirli bir tip rasyonel eliptik eğri ailesinin modüler formlara karşılık geldiğini ispatladı. İkilinin elde ettiği sonuç, Fermat’nın son teoremi için de bir ispat sundu. Fermat denkleminin pozitif tam sayı çözümü var ise (yani Fermat’nın son teoremi yanlış ise), bu çözüme karşılık gelen bir rasyonel eliptik eğri ve Wiles'ın ispatı neticesinde söz konusu eliptik eğriye karşılık gelen bir modüler form olması gerekiyordu. Ancak daha önce (Serre, Ribet, Frey ve başka pek çok matematikçinin katkısıyla) böyle bir modüler form olmadığı gösterilmişti.

Daha açık ifade edecek olursak, eğer (a, b, c) Fermat denkleminin pozitif tam sayılardan oluşan bir çözümü ise -yani $a^n+b^n=c^n$ ise- bu çözümle ilişkilendirilen $y^2 = x(x-a^n)(x-b^n)$ eliptik eğrisine karşılık gelen bir modüler formun olmadığı biliniyordu. Wiles ve Taylor öncülüğündeki çalışmalar ile tüm rasyonel eliptik eğrilerin bir modüler forma karşılık geldiği ispatlanınca $y^2 = x(x-a^n)(x-b^n)$ şeklinde bir eliptik eğri olamayacağı, dolayısıyla da Fermat denkleminin (a, b, c) şeklinde pozitif tam sayılardan oluşan bir çözümünün olamayacağı ispatlanmış oldu.

Fermat'nın son teoreminin ispatı, söz konusu köprünün kurulmasıyla ortaya çıkan ya da mümkün hâle gelen çok sayıda keşiften yalnızca biriydi. Matematikçiler köprüyü başka problemler söz konusu olduğunda da örneğin eliptik bir eğrinin modüler aritmetik çözümlerinin sayısının istatistiksel dağılımına ilişkin onlarca yıllık bir problem olan Sato-Tate sanısının ispatında da kullandı.

Wiles ve Taylor'ın bulguları yayımlandıktan sonra, inşa ettikleri yöntemin hâlâ geliştirilmeye açık yönleri olduğu anlaşıldı. Matematikçiler kısa bir süre sonra bu yöntemi rasyonel katsayılı tüm eliptik eğrileri kapsayacak şekilde nasıl geliştirebileceklerini çözdüler. Daha yakın bir zamanda yöntemin, katsayıları $3 + \sqrt{2}$ gibi basit irrasyonel sayılar olan denklemlerle verilen eliptik eğrileri nasıl kapsayabileceği de keşfedildi.

Matematikçilerin başaramadıkları şey ise Taylor-Wiles yöntemini katsayıları karmaşık sayılar [örneğin, i (-1'in karekökü olarak tanımlanan hayali sayı), 3+i ya da $\sqrt{2}i$ gibi] içeren eliptik eğrileri kapsayacak biçimde genişletmekti.



Aynı şekilde, kuvvetleri eliptik eğrilerinkinden çok daha yüksek olan Diophantine denklemleriyle başa çıkmayı da başaramamışlardı. Sağ tarafındaki en yüksek kuvvet 3 yerine 4 olan denklemlerin çözümü Taylor-Wiles yöntemiyle "çantada keklik"tir. Ancak kuvvet 5'e çıkar çıkmaz yöntem işe yaramaz hâle gelir.

Matematikçiler zamanla Langlands köprüsünde gerçekleşen bu iki doğal genişlemenin sadece Taylor-Wiles yöntemi üzerinde ufak değişiklikler yapma meselesi olmadığını anladı. Görünüşe göre çok temel bir engelle karşı karşıyaydılar.

Sorun, Taylor-Wiles yönteminin, bir Diophantine denklemiyle eşleşen otomorfik formu, art arda gelen başka otomorfik formlara yuvarlayarak bulmasıydı.

Ancak denklemin katsayılarının karmaşık sayılar içerdiği ya da kuvvetinin 5 ve üstü olduğu durumlarda, otomorfik formlar giderek daha nadir hâle geliyordu. Öyle ki genellikle belirli bir otomorfik formun yakınlarında yuvarlama amacıyla kullanılabilecek bir otomorfik form bulunmuyordu. Dolayısıyla bu durumlarda Taylor-Wiles yöntemini kullanarak bir Diophantine denklemiyle eşleşen otomorfik formu bulmak neredeyse imkânsız oluyordu.

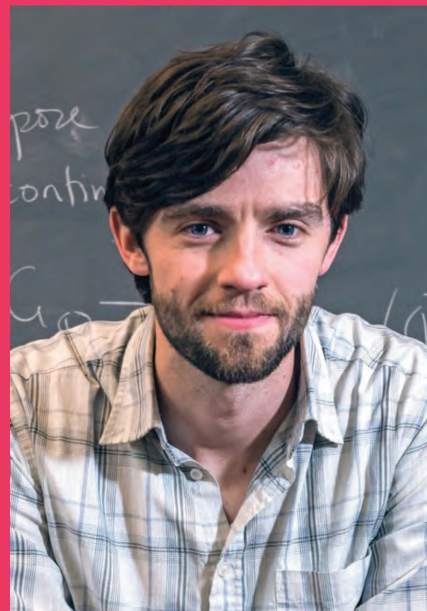
Ay'a Gitmek

Günümüzün sayı teorisyenlerinin pek çoğu Wiles'ın ispatı sıralarında yetişti. O sıralar 13 yaşında olan Gee, "Bir gazetenin ön sayfasında matematikle ilgili gördüğüm tek haberdi." diyor ve ekliyor "Pek çok insan için bu haber, heyecan verici buldukları, anlamak istedikleri ve sonuçta bu alanda çalışmalarına sebep olan bir şeydi."

Dolayısıyla 2012'de, University of Chicago'dan Frank Calegari ve şu anda Facebook'ta araştırmacı olarak çalışan David Geraghty, Taylor-Wiles yönteminin genişletilmesinin önünde duran engelin üstesinden gelinebilecek bir yol olduğunu öne sürünce yeni nesil sayı teorisyenleri arasında bir heyecan dalgası oluştu.

İkilinin çalışması, Gee'nin ifadesiyle "daha ileriye gidilmesinin önündeki bu temel engelin aslında engel falan olmadığını" gösteriyor; bunun yerine Taylor-Wiles yönteminin görünürdeki sınırlılıkları bize "elimizdekinin Calegari ve Geraghty'nin sunduğu daha genel yöntemin sadece bir gölgesi olduğunu" anlatıyor.

Engelin ortaya çıktığı durumlar, otomorfik formların, Wiles'ın incelediği iki boyutlu Escher tarzı fayans bezemelerindekinden daha yüksek boyutlu (hayali) fayans bezemelerinde yaşanan durumlar. Bu daha yüksek boyutlu uzaylarda,



David Geraghty 2015'te
Boston College'da iken.

otomorfik formlar zorlayıcı derecede nadirdir. Ancak işin ilginç yanı daha yüksek boyutlu fayans bezemelerinde genellikle iki boyutlu fayans bezemelerinden daha zengin bir yapı bulunmasıdır. Calegari ve Gerathy'nin geliştirdiği kavrayış, otomorfik formların kıtlığını telafi etmek üzere bu zengin yapılardan faydalanmaya yönelikti.

Daha özel olarak, elinizde bir otomorfik form varken, ona ait fayans bezemesindeki boyamaları, seçeceğiniz herhangi bir fayans parçasındaki ortalama rengin bir ölçüsü olarak kullanabilirsiniz. İki boyutlu düzende, otomorfik formlar, esasen bu tür bir ölçüm için elde olan tek araçlardır. Ancak daha yüksek boyutlu fayanslarda, "torsiyon sınıfları" adı verilen yeni ölçüm araçları ortaya çıkar. Bunlar, her bir fayans parçasına

ortalama bir renk yerine modüler aritmetikten bir sayı tayin eder. Bu torsiyon sınıflarında bir bolluk söz konusudur. Torsiyon, bir değişmeli grubun sonlu mertebedeki elemanlarına verilen isimdir.

Calegari ve Gerghty, bazı Diophantine denklemlerine karşılık gelen otomorfik formları, denklemleri başka otomorfik formlara değil de torsiyon sınıflarına yuvarlayarak bulmanın mümkün olabileceğini öne sürdü. Böylece Calegari ve Geraghty, Diophantine denklemlerinden otomorfik formlara giden, Wiles ve Taylor'ın kurduğuna göre çok daha geniş bir köprünün kılavuzunu ortaya koydu. Yine de ortaya koydukları fikirler tamamlanmış bir köprü oluşturmaktan uzaktı. Bu köprünün işe yarayabilmesi için matematikçilerin önce üç büyük sanıyı ispatlaması gerekecekti. Calegari bu durumu şuna benzetiyor: Geraghty'yle yazdıkları makale âdeta birilerinin bir uzay aracı, roket yakıtı ve uzay giysisi üretivermesi koşuluyla Ay'a nasıl gidileceğini tarif ediyordu! Calegari'ye göre bu üç sanı onların boyunu aşıyordu.

Calegari ve Geraghty'nin yöntemi özellikle de diğer yönde, otomorfik formlardan Diophantine denklemleri tarafına, hâlihazırda bir köprü olmasını gerektiriyordu. Bu köprünün de sadece otomorfik formları değil, torsiyon sınıflarını da taşıyabilmesi gerekiyordu. Şu anda Stanford Üniversitesinde görev yapan Taylor bu konuda şöyle diyor: "Calegari ve Geraghty programlarını ilk açıkladıklarında pek çok insan bunun ümitsiz bir problem olduğunu düşündü."

Ne var ki Calegari ve Geraghty'nin makalelerinin çevrimiçi olarak yayınlanmasının üzerinden bir yıl bile geçmeden, Bonn Üniversitesinde görev yapan ve daha sonra matematik alanındaki en prestijli ödüllerden biri olan Fields Madalyası'nı kazanan Peter Scholze, katsayıları, örneğin 3+2i ya da $4-\sqrt{5}i$ gibi basit karmaşık sayılar olan eliptik eğrilerin durumunda torsiyon sınıflarından Diophantine denklemlerinin tarafına nasıl gidileceğini çözerek Calegari ve Geraghty'nin planındaki ilk ve en önemli sanıyı ispatladı. Taylor, Scholze'nin pek çok heyecan verici şey yaptığını ancak bunun belki de Scholze'nin en büyük başarısı olduğunu düşünüyor.

Scholze, Calegari ve Geraghty'nin üç sanısından ilkini ispatladıktan sonra Imperial College London'dan Ana Caraiani ile ortak yazdığı makalesi de ikinci sanıyı ispatlamaya yaklaşmıştı. Bu makalelerde Scholze'nin köprüsünün doğru özellikleri taşıdığı da gösterilmişti.

Peter Scholze 2018'de, kısmen Langlands köprüsünde genişleme sağlayan çalışmalarından dolayı büyük bir prestije sahip olan Fields Madalyası'nı kazandı.

2016'nın sonbaharında Ana Caraiani ve Richard Taylor İleri Araştırmalar Enstitüsünde "gizli" bir çalıştay düzenledi. Çalıştayda iki önemli problem hızla çözüldü ve sonuçta 10 yazarlı önemli bir makale ortaya çıktı. Caraiani 2020 yılında, bu alandaki çalışmaları nedeniyle, 35 yaş altı Avrupalı matematikçilere verilen çok prestijli bir ödül olan Avrupa Matematik Derneği (European Mathematical Society) ödülünü almaya hak kazandı.

Artık programın erişilebilir olduğu hissi oluşmaya başlamıştı, bu yüzden Caraiani ve Taylor daha fazla ilerleme kaydedebilmek amacıyla 2016 sonbaharında İleri Araştırmalar Enstitüsünde, Calegari'nin "gizli" bir çalıştay olarak adlandırdığı bir çalışma toplantısı düzenledi. Calegari, odayı kontrol altında tuttuklarını ve başka hiç kimseyi içeri almadıklarını anlatıyor.

Birkaç gün süren açıklayıcı konuşmaların ardından çalıştay katılımcıları hem ikinci sanıyı nasıl çözümleyeceklerini hem de üçüncü sanıyla uğraşmak zorunda kalmadan nasıl ilerleyebileceklerini anlamaya başladı. Katılımcılardan Gee şöyle anlatıyor: "Tüm problemleri açıkça ortaya koyduktan belki de bir gün sonra hepsi çözülmüştü."

Katılımcılar haftanın geri kalanını ispatın çeşitli yönlerini ayrıntılandırarak geçirdi ve takip eden iki yıl içinde bulgularını sundukları 10 yazarlı (bir sayı kuramı makalesi için neredeyse hiç duyulmamış bir sayı) bir makale hazırladılar. Makaleleri temelde, katsayıları rasyonel sayılardan, irrasyonel sayılardan ve karmaşık sayılardan oluşan herhangi bir sayı sisteminden gelen eliptik eğriler için Langlands köprüsünü kuruyor.

Gee çalıştayla ilgili olarak, "Başlangıçta plan bir şeylerin kanıtlanmasına ne kadar yaklaşılabileceğini görmekti. Katılımcılardan herhangi birinin sonucu ispatlamayı umduğunu sanmıyorum." diyor.

Köprüyü Genişletmek

Bu esnada, köprünün eliptik eğrilerin de ötesine genişletilmesiyle ilgili paralel bir öykü gelişiyordu. Calegari ve Gee, şu an Fransa'daki École Normale Supérieure de Lyon'da görev yapan George Boxer ile birlikte Diophantine denklemindeki en yüksek kuvvetin -hâlihazırda bilinen, 3 ya da 4 olduğu durumu değil de- 5 ya da 6 olduğu durumu ele almışlardı. Ancak bu üç matematikçi argümanlarının kilit bir noktasında takılmıştı.

"Gizli" çalıştaydan hemen sonraki hafta sonu École Normale Supérieure'den Vincent Pilloni tam da bu güçlükten sıyrılmanın nasıl mümkün olabileceğini gösteren bir makale yayımladı. Calegari'nin anlattığına göre Calegari-Gee-Boxer üçlüsü hemen "Şu anda her ne yapıyorsak bırakıp Pilloni'yle çalışmamız gerekiyor!" fikrinde birleşti.

Kısa süre içinde dört matematikçi bu problemi de çözdü. Ancak fikirlerini ayrıntılı şekilde açıklamaları birkaç yıl aldı ve çalışmaların sonuçları yaklaşık 300 sayfalık bir yayına dönüştü. Makaleleri, 10 yazarlı diğer makaleyle

İleri Araştırmalar Enstitüsündeki gizli çalıştaydan kısa bir süre sonra Frank Calegari (solda), Toby Gee (ortada) ve Vincent Pilloni (sağda); George Boxer ile birlikte çalışarak Langlands köprüsünü eliptik eğrilerin ötesine genişletmenin bir yolunu buldular.

birlikte, dört gün arayla 2018'in Aralık sonunda çevrimiçi olarak yayımlandı.

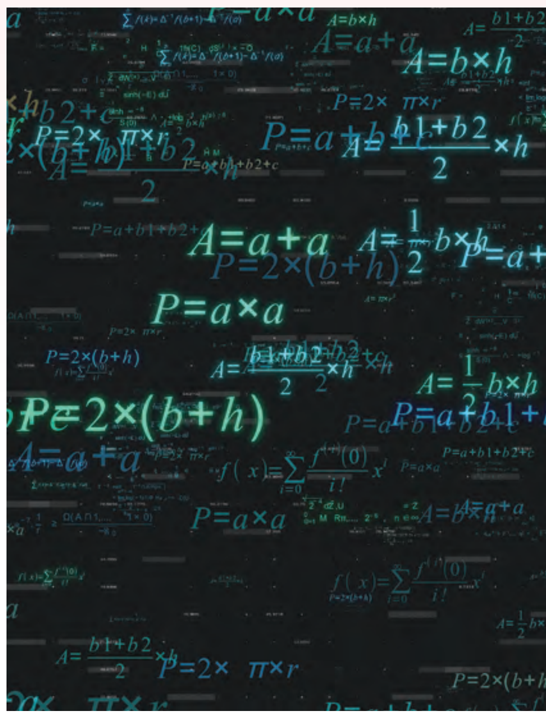
Emerton iki makaleyle ilgili olarak, "Gerçekten devasa işler. Bu makaleler ve öncülleri olan yapı taşları, konuyla ilgili gelinen son noktayı temsil ediyor." demişti.

Bu iki makale temelde Diofant denklemleri ve otomorfik formlar arasındaki gizemli ilişkinin yeni kavramlara da genişlediğini kanıtlasa da bir uyarı yapmak gerek: Bu makalelerin iki taraf arasında kusursuz bir köprü kurduğu da söylenemez. Aslında her iki makale de "potansiyel otomorfi" temelini kuruyor. Bu şu demek: Her bir Diofant denkleminin kendisine karşılık gelen bir otomorfik formu var ancak o otomorfik formun kendi kıtası üzerinde matematikçilerin umduğu bölgede bulunup bulunmadığını bilmiyoruz. Öte yandan, potansiyel otomorfi pek çok uygulama için yeterli. Örneğin Diofant denklemlerinin modüler aritmetikteki çözümlerinin istatistiğiyle ilgili Sato-Tate sanısı, 10 yazarlı makalede ortaya konan yeni yaklaşım sayesinde öncesine göre çok daha geniş bağlamlarda kanıtlanabildi.

Dahası matematikçiler şimdiden bu potansiyel otomorfi sonuçlarını nasıl geliştirebileceklerini çözmeye başladı bile. Örneğin, 2019'un Ekim ayında üç matematikçi; University of Illinois, Urbana-Champaign'den Patrick Allen, University of California, Los Angeles'tan Chandrashekhar Khare ve Cambridge Üniversitesinden Jack Thorne, 10 yazarlı makalede incelenen eliptik eğrilerin önemli bir kısmının gerçekten tam da tahmin edilen yerlerde ayakları olan köprülere sahip olduğunu ispatladı.

Bu düzeyde hassasiyete sahip köprüler sonunda matematikçilerin, Fermat'nın son teoreminin yüz yaşını deviren bir genellemesi de dâhil olmak üzere bir sürü yeni teoremi ispatlamasına imkân tanıyabilir. Fermat'nın son teoremine ilişkin söz konusu genelleme, teoremin kalbindeki denklemin, x, y ve z sadece tam sayılardan geldiğinde değil, tam sayılar ile hayali sayı i'nin kombinasyonlarından oluştuğu zaman da çözümsüz kalmaya devam ettiği kestiriminde bulunuyor.

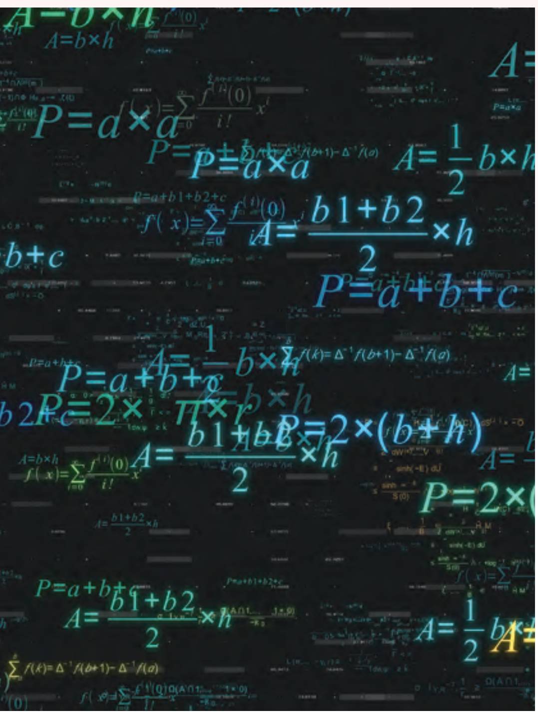
Yazımıza konu olan yeni makaleler daha öncesine göre Langlands kıtalarının çok daha geniş bölgelerini bağlıyor olsa da bu kıtalarda hâlâ keşfedilmemiş uçsuz bucaksız bölgeler var. Diofant denklemleri tarafında, daha büyük dereceli ya da daha



fazla değişkene sahip denklemler var. Diğer tarafta ise şimdiye kadar incelenmiş olanlardan daha karmaşık simetrik uzaylarda yaşayan otomorfik formlar var.

Emerton, "Bu makaleler şu anda başarının doruk noktası gibi görünüyor. Fakat gün gelecek geriye bakıldığında upuzun bir yolda atılmış birkaç basit adım gibi görünecekler." diyor.

Langlands'ın kendisi otomorfik formlar üzerinde düşünürken torsiyonu hiç hesaba katmamıştı. Dolayısıyla matematikçileri bekleyen zorluklardan biri bu farklı çizgileri birleştiren bir bakış açısı bulmak. Taylor ise bu konuda, "İşin kapsamı genişliyor. Langlands'ın ortaya koyduğu rotadan kısmen çıktık ve nereye gittiğimizi pek de bilmiyoruz." diyor. ■



Robert P. Langlands

ABD ve Kanada vatandaşı olan Robert P. Langlands, geniş bir yelpazede önemli uygulamaları olan şaşırtıcı matematiksel bağlantılar keşfetmesi dolayısıyla 2018 yılında matematikçilere verilen en saygın ödüllerden biri olan Abel Ödülü'nü kazandı. Langlands'in "matematiğin büyük birleşik kuramı" olarak da nitelenen tahminleri, sayılar kuramı ve harmonik analiz alanları arasındaki bağlantıyı çok genel bir çerçeve içine oturtuyordu. Langlands'in fikirleri o kadar kökten ve zengindi ki sayılar kuramı ve harmonik analiz arasındaki iletişimi kurmak için önerdiği mekanizmalar, sonunda Langlands programı adı verilen büyük bir projeye dönüştü. Söz konusu bağlantıları sağlayan "köprü" de Langlands köprüsü olarak anılmaya başladı. Programa son elli yılın en iyi matematikçilerinden yüzlercesi dâhil oldu. Modern matematikte başka hiçbir proje bu kadar geniş kapsamlı olmadı, bu kadar önemli sonuçlar ortaya koymadı ve bu kadar çok insanın katkısını içermedi. Başka araştırmacılar programın kapsamını daha da genişleten pek çok çalışma yaptı. Hatta üç araştırmacı "büyük resmin" küçük parçalarını doğruladıkları için Fields Madalyası kazandı. Programın ortaya koyduğu bağlantıların kapsamı o kadar geniş ki bu duruma bazen Langlands bile şaşırıyor.

Langlands programı bir bakıma araştırmacıların matematik problemlerini bir alandan başka bir alana aktarabilmesini sağladı. Böylece örneğin bir alanda çözümsüz görünen bir problem diğer alanda çözülebiliyordu. Bu yazıda konu edilen kilometre taşı niteliğindeki gelişmeler de Langlands programı kapsamındaki çalışmalar sonucunda elde edildi.

Robert P. Langlands 1936'da British Columbia'daki (Kanada) New Westminster'da doğdu. British Columbia Üniversitesinde 1957'de lisansını, 1958'de yüksek lisansını tamamladıktan sonra 1960'ta Yale Üniversitesinden doktorasını aldı. Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ), Princeton ve Yale üniversitelerinde öğretim üyeliği yapan Langlands, hâlen Princeton Üniversitesindeki İleri Araştırmalar Enstitüsünde, bir zamanlar Einstein'ın kullandığı bir ofiste profesörlük görevini sürdürüyor.

1967-1968'de ODTÜ'de Cahit Arf ile ofis komşusu olan Langlands; Türkçe, Almanca ve Rusça biliyor. 2004'te Arf Dersleri kapsamında ODTÜ'de, 2009'da Yıldız Teknik Üniversitesinde, 2011'de de Galatasaray Üniversitesinde verdiği dersleri Türkçe işlemişti. Langlands en son 2018 yılında Türk Matematik Derneğinin daveti üzerine Tosun Terzioğlu anısına düzenlenen konuşma dizilerinden üçüncüsünü vermek üzere İstanbul'a gelmişti. Türkçe konuştuğu bu etkinliğin kaydına Türk Matematik Derneğinin web sayfasından erişmek mümkün.

Kaynaklar

Klarreich Erica, "'Amazing' Math Bridge Extended Beyond Fermat's Last Theorem", *Quanta Magazine* WEB içeriği, https://www.quantamagazine.org/amazing-math-bridge-extended-beyond-fermats-last-theorem-20200406/

https://euromathsoc.org/magazine/articles/mag-3

http://tmd.org.tr/tterzioglu-3_langlands/